

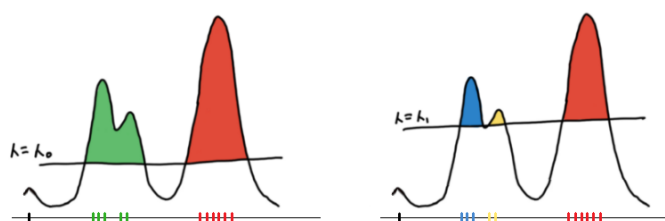
Co bude v dnešní přednášce

- Shlukování pomocí hustoty
- DBSCAN
- Evaluace shlukování pomocí Silhouette skóre
- Asociační pravidla

45 Shlukování pomocí hustoty

Úvod do shlukování pomocí hustoty

- V dnešní přednášce se zaměříme na shlukování, které využívá odhad hustoty rozdělení dat na prostoru \mathcal{X} možných hodnot příznaků.
- Z pravděpodobnostního pohledu chápeme pozorovaná data jako **realizace náhodného vektoru** $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^T$.
- Pokud budeme mít nějakým způsobem odhadnutou hustotu pravděpodobnosti $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \equiv f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_p)$ (resp. něco, co jí je úměrné), můžeme ji využít k získání shlukování včetně identifikace bodů, které do žádných shluků nepatří.
- Shluky můžeme získat jako **souvislé oblasti**, ve kterých odhad hustoty překročí nějakou zvolenou hranici.
- Body mimo tyto oblasti pak označíme jako **šum**.

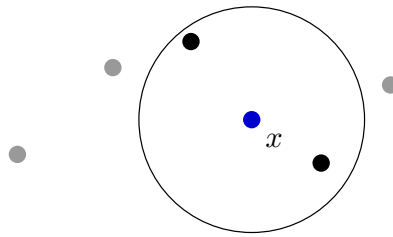


46 DBSCAN

DBSCAN - úvodní pojmy

- Jedním s aktuálně nejpoužívanějších algoritmů shlukování, který je implicitně založen na principu odhadu hustoty, je algoritmus *DBSCAN*, což je zkratka angl. *density-based spatial clustering of applications with noise*, [Ester et al. (1996)].
- Připravme si nyní základní pojmy, na kterých DBSCAN stojí.
- Uvažujme metrický prostor \mathcal{X} s metrikou $d(x, y)$ ze kterého pochází dataset \mathcal{D} a parametry $\varepsilon > 0$ a $\text{MinPts} \in \mathbb{N}^+$.
- Definujme ε okolí bodu x v \mathcal{D} (angl. ε -neighborhood) jako množinu

$$N_\varepsilon(x) = \{y \in \mathcal{D} | d(x, y) \leq \varepsilon\}.$$



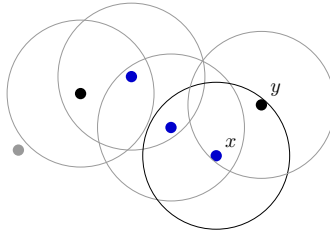
Znázornění ε okolí.

DBSCAN - klíčové body, přímá dosažitelnost

- Bod $x \in \mathcal{D}$ je *klíčový bod* (angl. *core point*), jestliže v jeho ε okolí v \mathcal{D} je alespoň MinPts bodů,

$$|N_\varepsilon(x)| \geq \text{MinPts}.$$

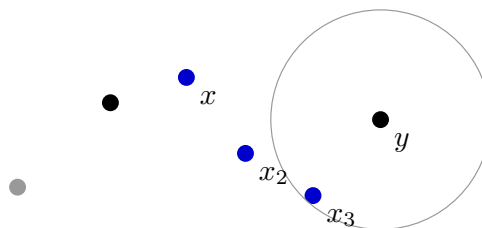
- Bod $y \in \mathcal{D}$ je *přímo dosažitelný* (angl. *directly density-reachable*) z bodu $x \in \mathcal{D}$, jestliže x je klíčový bod a $y \in N_\varepsilon(x)$.
- Relace přímé dosažitelnosti je symetrická pro dvojici klíčových bodů, je ale nesymetrická pro tzv. *okrajový bod* (angl. *border point*), což je bod, který není klíčový, ale je přímo dosažitelný z klíčového bodu.



Pro $\text{MinPts} = 3$ je bod y přímo dosažitelný z x . Všechny klíčové body jsou modré, všechny okrajové body jsou černé.

DBSCAN - dosažitelnost

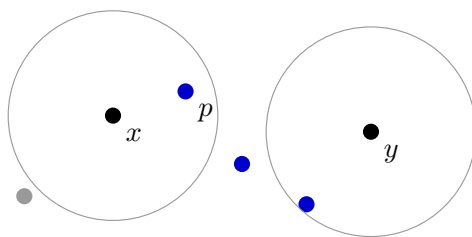
- Bod $y \in \mathcal{D}$ je *dosažitelný* (angl. *density-reachable*) z bodu $x \in \mathcal{D}$, pokud existuje posloupnost $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{D}$ bodů tak, že $x_1 = x$, $x_n = y$ a pro každé $i = 1, \dots, n - 1$ je x_{i+1} přímo dosažitelný z bodu x_i .
- Z toho plyne, že všechny body po cestě **kromě posledního** musí být klíčové body.



Pro $\text{MinPts} = 3$ je bod y dosažitelný z bodu x .

DBSCAN - spojenost

- Bod $y \in \mathcal{D}$ je *spojený* (angl. *density-connected*) s bodem $x \in \mathcal{D}$, jestliže existuje (klíčový bod) $p \in \mathcal{D}$, tak, že x i y jsou dosažitelné z bodu p .
- Relace spojenosti je zjevně symetrická. Pro klíčové body je také tranzitivní.
- Jestliže jsou dva body spojené a jeden z nich je klíčový bod, tak ten druhý je z toho prvního dosažitelný.



Pro $\text{MinPts} = 3$ je bod y spojený s bodem x .

DBSCAN - shluky, šum

Shluk nyní definujeme jako **maximální množinu spojených** bodů.

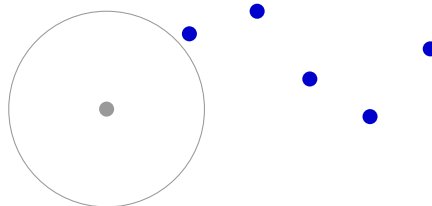
Definice 46.1

Shluk (angl. *cluster*) C je neprázdná podmnožina \mathcal{D} tak, že:

- Pro každé $x, y \in \mathcal{D}$ platí, že když $x \in C$ a y je dosažitelný z x , pak $y \in C$ (**maximalita**).
- Pro každé $x, y \in C$ je x spojený s y (**souvislost**).

Označme C_1, \dots, C_k množinu všech shluků v \mathcal{D} (vzhledem k ε a k). Množinu N bodů z \mathcal{D} , které nejsou v žádném ze shluků nazýváme **šumem** (angl. *noise*),

$$N = \mathcal{D} \setminus \bigcup_{i=1}^k C_i$$



Body ve shluku jsou modré, bod šumu je šedivý.

Poznámky k definici shluků

- Shluk C je vždy neprázdný a tedy existuje bod $x \in C$, který je spojený sám se sebou, což musí být přes nějaký klíčový bod $p \in C$ (je s x spojený a tedy také patří do shluku), ze kterého jsou dosažitelné všechny body v jeho ε okolí, kterých je alespoň MinPts .

Právě jsme tedy ukázali, že každý shluk obsahuje alespoň MinPts bodů.

- Každý bod ve shluku C je spojený se všemi klíčovými body v C a tedy je z libovolného klíčového bodu dosažitelný. Shluk je tedy tvořen všemi body, které jsou dosažitelné z libovolného klíčového bodu v C .
- To nám dává návod, jak může algoritmus tvorby shluků fungovat. Najdeme klíčový bod a vytvoříme k němu shluk jako množinu všech z něho dosažitelných bodů (které ještě nejsou v jiném shluku).
- Je zřejmé, že okrajový bod může patřit do několika shluků. Výsledek algoritmu v takovém případě nemusí být deterministický, záleží do kterého možného shluku ho dáme jako první.

Abstraktní popis algoritmu

Nyní si abstraktním způsobem popíšeme běh algoritmu DBSCAN.

Algoritmus DBSCAN

Nalezení klíčových bodů: Spočítáme ε okolí každého bodu a identifikujeme klíčové body.

Vytvoření zárodků shluků: Spojíme sousední (přímo dosažitelné) klíčové body do shluků.

Pro každý bod, který není klíčový:

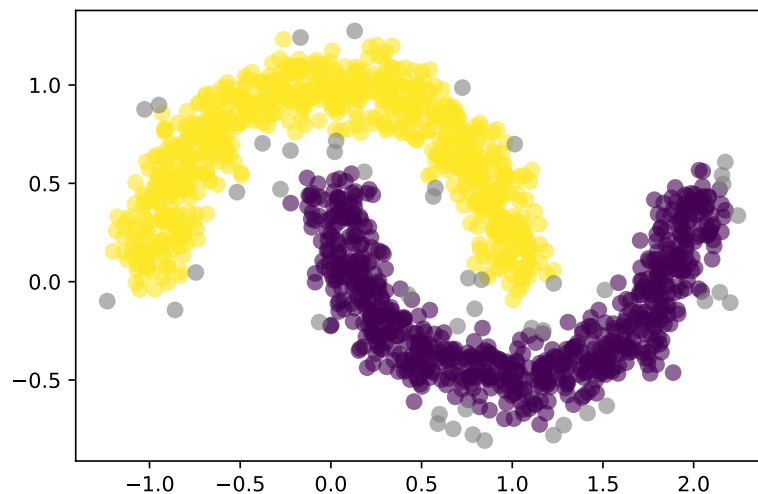
- Přidáme do shluku podle klíčového bodu v jeho okolí.

- Pokud takový neexistuje, přidáme mezi šum.
- Okrajový bod, který má ve svém ε okolí klíčové body z různých (zárodků) shluků spadne do prvního shluku, ke kterému se algoritmus dostane.
- Lze ukázat ([Schubert et al. (2017)]), že složitost v nejhorším případě je $O(n^2)$. V mnoha reálných situacích se ale lze dostat na $O(n \log n)$.

DBSCAN - volba parametrů

- Zaměříme se nyní krátce na volbu parametrů algoritmu DBSCAN.
- Ukazuje se, že parametr MinPts je mnohem méně důležitý než parametr ε . Obvykle dobrou volbou jsou hodnoty okolo 4 – 6 (někdy bývá doporučováno $2 \dots p$, kde p je počet příznaků).
- Pro parametr ε bývá doporučováno volit co nejmenší hodnotu s tím, že lze například brát průměrnou vzdálenost bodů k jejich nejbližšímu $(2 \cdot p - 1)$ tému sousedovi.
- Také můžeme sledovat velikost šumu. Uvádí se, že obvykle by poměr šumu měl být mezi 1% a 30%.
- Dále je dobré sledovat velikost největšího shluku. Pokud jeho velikost překračuje 50% velikosti datasetu, bývá vhodné zmenšit ε , případně použít nějaký pokročilejší algoritmus (např. HDBSCAN).
- Více detailů k volbě parametrů najdete v [Schubert et al. (2017)] nebo v [Sander et al. (1998)].

DBSCAN - ukázka a poznámky



Znázornění shluků a šumu.

- Mezi hlavní výhody DBSCAN (a obecně metod založených na hustotě) patří možnost nalezení nekonvexních shluků.
- Další výhodou je snížená citlivost na odlehlé hodnoty - které jsou označeny jako šum.

47 Silhouette skóre

Evaluace pomocí Silhouette skóre (1/3)

- Vraťme se nyní k obecné úloze shlukování a ukažme si jednoduchou a používanou metodu pro evaluaci shlukování pomocí metody *Silhouette* [Rousseeuw, P. (1987)], kterou lze využít i k určení optimálního počtu shluků.
- Uvažujme shlukování $\mathcal{D} = C_1 \cup \dots \cup C_k$ na metrickém prostoru \mathcal{X} s metrikou $d(x, y)$ a pro libovolný bod $x \in \mathcal{D}$ označme $j(x)$ index shluku do kterého x patří, tj. $x \in C_{j(x)}$.
- Pro bod $x \in \mathcal{D}$ nyní:

- Spočteme $a(x)$ jako průměrnou vzdálenost bodu x od všech ostatních bodů ve stejném shluku (**vnitřní rozdílnost**, angl. within dissimilarity)

$$a(x) = \frac{1}{|C_{j(x)}| - 1} \sum_{y \in C_{j(x)}, y \neq x} d(x, y).$$

- Pro každý další shluk C_i , $i \neq j(x)$ spočteme průměrnou vzdálenost bodu x od všech bodů v tomto shluku

$$d(x, C_i) = \frac{1}{|C_i|} \sum_{y \in C_i} d(x, y)$$

- Spočteme $b(x)$ jako minimum z těchto průměrných vzdáleností od ostatních shluků (**sousední rozdílnost**, angl. between dissimilarity)

$$b(x) = \min_{i \neq j(x)} d(x, C_i)$$

Evaluace pomocí Silhouette skóre (2/3)

Finální silhouette skóre bodu $x \in \mathcal{D}$ získáme vztahem

$$s(x) = \frac{b(x) - a(x)}{\max\{a(x), b(x)\}}.$$

- Jestliže máme pouze jeden shluk, položíme $s(x) = 0$.
- Z definice vidíme, že vždy platí

$$-1 \leq s(x) \leq 1.$$

- Hodnota $s(x)$ blízka 1 znamená, že vnitřní rozdílnost $a(x)$ je mnohem menší než sousední rozdílnost $b(x)$, což značí, že ten bod je dobře zaříděn.
- Hodnota $s(x)$ okolo 0 znamená, že $a(x)$ je podobně velké jako $b(x)$ a tedy bod x je někde na okraji svého shluku a sousední shluk je blízko. Čili by ten bod klidně mohl patřit i do toho druhého shluku.
- Hodnota $s(x)$ blízka -1 znamená, že vnitřní rozdílnost $a(x)$ je mnohem větší než sousední rozdílnost $b(x)$ a tedy bod x by měl spíše patřit do toho sousedního shluku než do toho svého. Je tedy špatně přiřazen.

Evaluace pomocí Silhouette skóre (3/3)

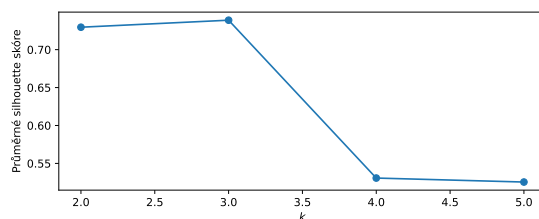
- Z ohodnocení $s(x)$ každého z bodů x můžeme získat jednak průměrné skóre s_i pro každý shluk C_i zvlášť

$$s_i = \frac{1}{|C_i|} \sum_{x \in C_i} s(x),$$

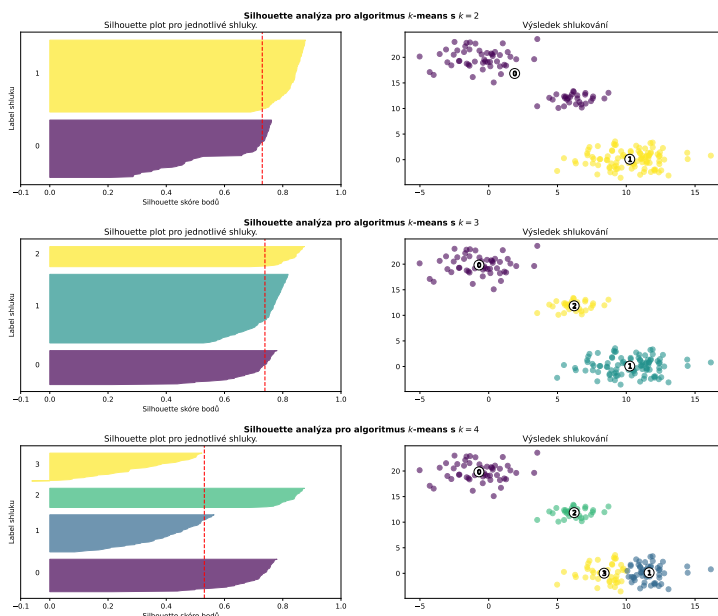
- a pak také průměrné skóre s pro celé shlukování

$$s = \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} s(x).$$

- Čím vyšší dostaneme hodnotu, tím jsou body ve shlucích správněji umístěné a tedy je celé shlukování lepší.
- Porovnání skóre pro různé počty shluků můžeme použít k nalezení vhodného počtu shluků jako hodnoty, při které je skóre s maximální.



Znázornění silhouetové skóre



48 Asociační pravidla

Analýza asociačních pravidel

- *Analýza asociačních pravidel* je jedna ze standardních a oblíbených metod pro dobývání znalostí z komerčních databází.
- Obecným cílem je nalézt společné hodnoty příznaků $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^T$, které se v databázi nejčastěji vyskytují.
- V zásadě jde přesně o jeden z hlavních cílů nesupervizovaného učení, kdy chceme nalézt oblasti prostoru, kde se data vyskytují s velkou pravděpodobností.
- V nejčastěji používaném zjednodušení se zabýváme pouze oblastmi, které jsou ve tvaru kartézského součinu pro jednotlivé příznaky, tj. chceme, aby pravděpodobnost

$$P\left(\bigcap_{j=1}^p (X_j \in s_j)\right),$$

kde s_j je podmnožina hodnot příznaku X_j , byla **relativně velká**.

- Průnik $\bigcap_{j=1}^p (X_j \in s_j)$ se v takovém případě nazývá *konjunktivní pravidlo* (angl. *conjunctive rule*).

Analýza nákupního košíku

- Analýza asociačních pravidel je nejčastěji aplikována v případě binárních příznaků, $X_j \in \{0, 1\}$, kdy se pak nazývá *analýza nákupního košíku* (angl. *market basket analysis*).

- Pro oblast, kterou hledáme ve tvaru kartézského součinu se v tomto případě používá ještě další omezení, a to, že s_j je buď jednoprvková množina $\{1\}$ nebo všechny možnosti daného příznaku X_j (v tu chvíli příznak vypadne).
- Ekvivalentně tedy hledáme množinu indexů $\mathcal{K} \subset \{1, \dots, p\}$ tak, že

$$P(\cap_{j \in \mathcal{K}} (X_j = 1)) = P\left(\prod_{j \in \mathcal{K}} X_j = 1\right)$$

je **relativně velká**.

- Množina \mathcal{K} se pak nazývá *množina položek* (angl. *item set*).
- Relativní velikost položek v datasetu, které danou množinu položek obsahují se značí $T(\mathcal{K})$ a nazývá *podpora* (angl. *support*) množiny položek \mathcal{K} a odpovídá odhadu výše uvedené pravděpodobnosti:

$$T(\mathcal{K}) = \hat{P}(\cap_{j \in \mathcal{K}} (X_j = 1)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \prod_{j \in \mathcal{K}} x_{i,j}.$$

Asociační pravidla (1/2)

- Při provádění analýzy nákupního košíku hledáme všechny množiny položek, pro které je **podpora větší** než nějaká zvolená mez t :

$$\{\mathcal{K}_\ell | T(\mathcal{K}_\ell) > t\}.$$

- K nalezení řešení se používá efektivní algoritmus (případně jeho novější vylepšení), který se nazývá **Apriori algoritmus** ([Agrawal, Srikant (1994)]).
- Pro každou množinu položek \mathcal{K} , kterou takto získáme, dále hledáme vhodné rozložení na dvě disjunktí podmnožiny A a B , $A \cup B = \mathcal{K}$, které budeme nazývat *asociační pravidlo* (angl. *association rule*) a značit

$$A \Rightarrow B.$$

- První položka A asociačního pravidla se nazývá *předpoklad* (angl. *antecedent*) a druhá položka B se nazývá *závěr* (angl. *consequent*).
- *Podpora* $T(A \Rightarrow B)$ pravidla $A \Rightarrow B$ je definována jako podpora sjednocení $\mathcal{K} = A \cup B$.
- *Spolehlivost* (angl. *confidence*) $C(A \Rightarrow B)$ pravidla $A \Rightarrow B$ je definována jako podpora pravidla podělená podporou předpokladu A :

$$C(A \Rightarrow B) = \frac{T(A \Rightarrow B)}{T(A)},$$

což odpovídá odhadu podmíněné pravděpodobnosti $P(B|A)$.

Asociační pravidla (2/2)

- Asociační pravidla jsou volena tak, aby **spolehlivost byla větší** než nějaká zvolená mez c .
- **Finálním výstupem asociační analýzy** pravidel je množina asociačních pravidel, které splňují

$$T(A \Rightarrow B) > t \quad \text{a} \quad C(A \Rightarrow B) > c.$$

- U nalezených asociačních pravidel se dále často měří *zdvih* (angl. *lift*) definovaný jako

$$L(A \Rightarrow B) = \frac{C(A \Rightarrow B)}{T(B)},$$

který odpovídá odhadu podílu $P(B|A)/P(B)$ což znamená, kolikanásobně je větší $P(B|A)$ oproti $P(B)$.

- Někdy se také měří *pokrytí* (angl. *coverage*) definované jako

$$\text{Coverage}(A \Rightarrow B) = \frac{T(A \Rightarrow B)}{T(B)},$$

což odpovídá odhadu podmíněné pravděpodobnosti $P(A|B)$.

- Pokrytí tedy indikuje, jak často lze závěr vyložit coby důsledek předpokladu.

Asociační pravidla - příklady

Klasickým příkladem asociačního pravidla je

$$\{\text{párky}\} \Rightarrow \{\text{hořčice, chléb}\}.$$

- **Podpora** 0.06 znamená, že v celém datasetu se trojice položek $\{\text{párky, hořčice, chléb}\}$ vyskytuje v 6% případech.
- Pokud se **párky** vyskytnou v datasetu v 8% případech, bude **spolehlivost** $0.06/0.08 = 0.75$, což znamená, že když si zákazník koupil **párky**, v 75% případech si koupil také **hořčici** a **chléb**.
- Pokud je dvojice **hořčice** a **chléb** v datasetu v 15% případech, **zdvih** bude $0.75/0.15 = 5$.
- **Pokrytí** v takovém případě bude $0.06/0.15 = 0.4$. Čili ve 40% případech lze **hořčici** a **chléb** uvažovat jako důsledek koupě **párků**.

Nevýhoda omezení na podporu je, že pravidla s velkou hodnotou spolehlivosti i zdvihu ale s nízkou podporou, jako např.

$$\{\text{doutník}\} \Rightarrow \{\text{rum}\},$$

nebudou nalezeny.

ChangeLog

Verze	Datum	Autor	Log
1.0	7.12.2023	DV	Výchozí verze pro rok 2023/2024.
1.0	15.12.2022	DV	Výchozí verze pro rok 2022/2023.