Programování grafických aplikací pokročilé operace s obrazem

Radek Richtr

Institute of Information Theory and Automation
Academy of Sciences of the Czech Republic
Prague, Czech Republic

December 21, 2024

Outline I

Intro

- Teoretická přednáška

Intro

- Teoretická přednáška
- Přehled algoritmických podkladů

Intro

- Teoretická přednáška
- Přehled algoritmických podkladů
- … a matematických podkladů pro grafické algoritmy

Intro

- Teoretická přednáška
- Přehled algoritmických podkladů
- ... a matematických podkladů pro grafické algoritmy
- matematika je základ, bez kterého to nejde (alespoň její intuitivní pochopení)

Matematickofyzikální minimum

- Fourierova transformace

Matematickofyzikální minimum

- Fourierova transformace
- Frekvence v obrazu

Matematickofyzikální minimum

- Fourierova transformace
- Frekvence v obrazu
- Frekvence a fáze

Matematickofyzikální minimum

- Fourierova transformace
- Frekvence v obrazu
- Frekvence a fáze
- Počítání příznaků, konvoluce

Příznaky (features)

- Popisují nějakou vlastnost dat (obrazu)
- Často matematický význam (střední hodnoty, odchylka, barva, atd.)
- Ulehčují práci (několik příznaků místo mnoha dat)
- Obvykle charakterizují nějakou skupinu dat
- Nejjednodušší příznaky?

Příznaky (features)

- Popisují nějakou vlastnost dat (obrazu)
- Často matematický význam (střední hodnoty, odchylka, barva, atd.)
- Ulehčují práci (několik příznaků místo mnoha dat)
- Obvykle charakterizují nějakou skupinu dat
- Nejjednodušší příznaky?
  - samotné barevné kanály (červenost, zelenost, intenzita, atd.)

Příznaky (features)

- Popisují nějakou vlastnost dat (obrazu)
- Často matematický význam (střední hodnoty, odchylka, barva, atd.)
- Ulehčují práci (několik příznaků místo mnoha dat)
- Obvykle charakterizují nějakou skupinu dat
- Nejjednodušší příznaky?
  - samotné barevné kanály (červenost, zelenost, intenzita, atd.)
  - ale i např. výsledky detektoru hran

Příznaky

- Segmentace
  - lidi vs. pozadí - texturlání příznaky, Haralick, LBP
- Detekce
  - např. rakovina v mamogramech - 3DCAR
- Reprezentace
  - např. pro spojování obrazů v panoramatech - SIFT, SURF, atd.
- A mnoho dalšího!

Příznaky - invarianty

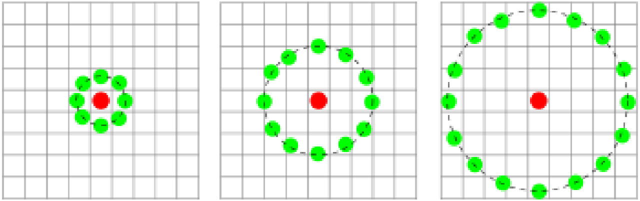
- Invariantní na rotace
- Invariantní na afinní transformace
- Invariantí na změnu škálování
- Invariantní na změnu intenzity
- atd.

Za každý invariant se platí.

LBP

$$LBP_{P,R} = \sum_{p=0}^{P-1} s(g_p - g_c)2^p \tag{1}$$

$$s(x) = \begin{cases} 1, & pro\ x >= 0 \\ 0, & pro\ x < 0. \end{cases} \tag{2}$$



Haralick

14 příznaků reprezentujících různé vlastnosti textur (entropie, směrová odchylka, korelace, momenty, ...) pro malou šedotónovou matici GLCM (plovoucí okno) dané velikosti

$$f_2 = \sum_{n=0}^{N_g-1} n^2 \left(\sum_{i=1}^{N_g} \sum_{j=1}^{N_g} 9(i,j) \right) \tag{3}$$

kde:
$|i - j| = n$,
$p(i,j)$ je intenzita pixelu se součadnicemi i a j,
$p_x(i)$ je marginální pravděpodobnost (součet řádků),
$p_y(i)$ je marginální pravděpodobnost(součet sloupců),
N_g je počet úrovní šedi

FT - úvod a idea

- Slouží k analýze signálů (ve 2D obraz).

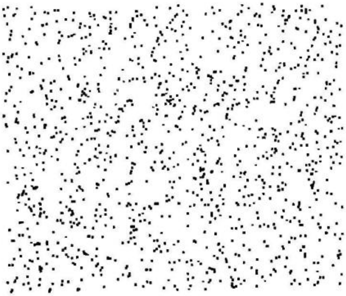
FT - úvod a idea

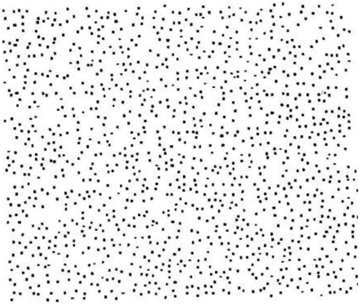
- Slouží k analýze signálů (ve 2D obraz).
- Zjišťuje paramentry harmonických frekvencí bází ze kterých se obraz/signál skládá.

FT - úvod a idea

- Slouží k analýze signálů (ve 2D obraz).
- Zjišťuje paramentry harmonických frekvencí bází ze kterých se obraz/signál skládá.
- A co to je?

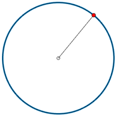
Náhodnost?





Fourierova transformace

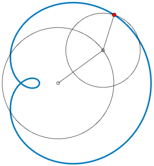
- Zkusíme to vysvětlit trochu *jinak*...



Představme si kolečko s průměrem r_0, které má vpravo od středu na okraji puntík (bod), má počáteční úhel α_0 a otáčí se rychlostí s_0. Tento puntík kreslí obrázek kružnice.

Fourierova transformace

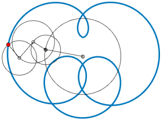
- Zkusíme to vysvětlut trochu *jinak*...



Představme si, že na puntíku tohoto kolečka je další kolečko s průměrem r_1 natočené pod úhlem α_1, které se otáčí rychlosti s_1. Tato soustava dvou koleček kreslí už mnohem zajímavější tvar.

Fourierova transformace

- Zkusíme to vysvětlut trochu *jinak*...



Představme si, že na puntíku posledního kolečka můžeme mít další kolečko, na něm další a tak dál. Koleček může být až nespočetně mnoho.
Co všechno lze takovýmito soustavami koleček nakreslit? Čtverec? Trojúhelník?

Fourierova transformace

- Takovému systému koleček říkáme Ptolemájský systém - Ptolemy's system of epicycles and deferents.

Fourierova transformace

- Takovému systému koleček říkáme Ptolemájský systém - Ptolemy's system of epicycles and deferents.
- Nakreslit tím lze *cokoli* - `https://www.youtube.com/watch?v=QVuU2YCwHjw`

Fourierova transformace

- Takovému systému koleček říkáme Ptolemájský systém
  - Ptolemy's system of epicycles and deferents.
- Nakreslit tím lze *cokoli*
  - https://www.youtube.com/watch?v=QVuU2YCwHjw
  - https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k&ab_channel=3Blue1Brown
- Pozorování:
  - dvě kolečka se stejnou rychlostí lze spojit do jednoho s jiným poloměrem a úhlem

Fourierova transformace

- Máme tedy křivku, spojitou funkci $f : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}^2$
  - pro každý parametr t vrátí pozici (x, y) - bod křivky
  - pro křivku hledáme soustavu koleček, která ji zvládne nakreslit

Fourierova transformace

- Máme tedy křivku, spojitou funkci $f : \Re \longrightarrow \Re^2$
  - pro každý parametr t vrátí pozici (x, y) - bod křivky
  - pro křivku hledáme soustavu koleček, která ji zvládne nakreslit
- Soustavu lze reprezentovat jako funci g, která pro každou rychlost s vrátí dvojici (r, α)
  - poloměr a úhel kolečka, rychlost s v dané soustavě

Fourierova transformace

- Máme tedy křivku, spojitou funkci $f : \Re \longrightarrow \Re^2$
  - pro každý parametr t vrátí pozici (x, y) - bod křivky
  - pro křivku hledáme soustavu koleček, která ji zvládne nakreslit
- Soustavu lze reprezentovat jako funci g, která pro každou rychlost s vrátí dvojici (r, α)
  - poloměr a úhel kolečka, rychlost s v dané soustavě
- Jednoduché?
  - Operace, která hledá soustavu koleček ke křivce funguje stejně jako Fourierova transformace!

Fourierova transformace

- Hledá tedy k jedné funkci jinou funkci.
  - na jedné straně máme (x, y) na druhé (r, α)

Fourierova transformace

- Hledá tedy k jedné funkci jinou funkci.
  - na jedné straně máme (x, y) na druhé (r, α)
- místo 2D souřadnic na levé straně použijeme komplexní čísla
  - (x, y) zapisujeme jako $(x + yi)$
  - křivka je tedy $f : \Re \longrightarrow \mathfrak{C}$

Fourierova transformace

- Hledá tedy k jedné funkci jinou funkci.
  - na jedné straně máme (x, y) na druhé (r, α)
- místo 2D souřadnic na levé straně použijeme komplexní čísla
  - (x, y) zapisujeme jako $(x + yi)$
  - křivka je tedy $f : \Re \longrightarrow \mathfrak{C}$
- Kolečka na druhé straně (r, α) by taky potřebovaly komplexní čísla, ať je to jednotné
  - tímto číslem nechť je počáteční poloha puntíku v komplexní rovině (vzhledem ke středu kolečka)
  - tedy místo (r, α) máme $r * (cos(\alpha) + sin(\alpha) * i) = (a + b * i)$
  - nyní je i soustava koleček ve tvaru $g : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}$

Fourierova transformace

- Hledá tedy k jedné funkci jinou funkci.
  - na jedné straně máme (x, y) na druhé (r, α)
- místo 2D souřadnic na levé straně použijeme komplexní čísla
  - (x, y) zapisujeme jako $(x + yi)$
  - křivka je tedy $f : \Re \longrightarrow \mathfrak{C}$
- Kolečka na druhé straně (r, α) by taky potřebovaly komplexní čísla, ať je to jednotné
  - tímto číslem nechť je počáteční poloha puntíku v komplexní rovině (vzhledem ke středu kolečka)
  - tedy místo (r, α) máme $r * (cos(\alpha) + sin(\alpha) * i) = (a + b * i)$
  - nyní je i soustava koleček ve tvaru $g : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}$
- A jak s těmi úhly?
  - násobením přece! otočení o 30 je násobení $(\cos(30) + \sin(30)i)$

Fourierova transformace

- K čemu že byly ty komplexní čísla?
  - soustava je nyní jednoznačná (otočení o 40° = otočení o 400°)
  - k převodu tedy nyní lze najít i inverzi!
  - shoduje se systém signálu (křivka) i obrazu (kolečka)

Fourierova transformace

- K čemu že byly ty komplexní čísla?
  - soustava je nyní jednoznačná (otočení o 40° $=$ otočení o 400°)
  - k převodu tedy nyní lze najít i inverzi!
  - shoduje se systém signálu (křivka) i obrazu (kolečka)
- Znovu, jak že to funguje?
  - transformace hledá ke křivce kolečka které ji kreslí
  - parametr křivky je čas t
  - chceme, aby při parametru t byl puntík (křivka) v bodu $f(t)$
  - pro $t = 0$ jsou kolečka v počáteční poloze

Fourierova transformace

- Vlastnosti naší transformace?

Fourierova transformace

- Vlastnosti naší transformace?
- kolečka jde určitě prohazovat
  - ejhle, komutativnost!

Fourierova transformace

- Vlastnosti naší transformace?
- kolečka jde určitě prohazovat
  - ejhle, komutativnost!
- křivka jde zvětšovat k krát!
  - $(k \times f)(t) = k \times (x + yi)$

Fourierova transformace

- Vlastnosti naší transformace?
- kolečka jde určitě prohazovat
  - ejhle, komutativnost!
- křivka jde zvětšovat k krát!
  - $(k \times f)(t) = k \times (x + yi)$
- křivky jsou sčítat! $(f_1 + f_2)(t) + (x_1 + y_1 t) + (x_2 + y_2 i))$
  - jak vypadají kolečka? prostě soustavy napojíme za sebe!
  - A víme, že když se kolečka točí stejně rychle, jde je sloučit...
  tedy$FT(f_1) + g_1, FT(f_2) = g_2 \implies FT(f_1 + f_2) = g_1 + g_2$

Fourierova transformace

- A jak že se to počítá? (začneme jednodušším inverzem, tedy křivka $\implies$ kolečka)

Fourierova transformace

- A jak že se to počítá? (začneme jednodušším inverzem, tedy křivka $\Longrightarrow$ kolečka)
  - máme $g(s)$ a zajímá nás pohyb puntíku, tedy poloha při parametru t neboli $f(t)$

Fourierova transformace

- A jak že se to počítá? (začneme jednodušším inverzem, tedy křivka $\implies$ kolečka)
  - máme $g(s)$ a zajímá nás pohyb puntíku, tedy poloha při parametru t neboli $f(t)$
  - rychlost s, poloměr a počáteční úhel představuje kompexní číslo $g(s) = a + bi$

Fourierova transformace

- A jak že se to počítá? (začneme jednodušším inverzem, tedy křivka $\implies$ kolečka)
  - máme $g(s)$ a zajímá nás pohyb puntíku, tedy poloha při parametru t neboli $f(t)$
  - rychlost s, poloměr a počáteční úhel představuje kompexní číslo $g(s) = a + bi$
  - jaká je hodnota křivky pro parametr t? Stačí natočit kolečko o $t \times s$. Otáčet už umíme!

Fourierova transformace

- A jak že se to počítá? (začneme jednodušším inverzem, tedy křivka $\implies$ kolečka)
  - máme $g(s)$ a zajímá nás pohyb puntíku, tedy poloha při parametru t neboli $f(t)$
  - rychlost s, poloměr a počáteční úhel představuje kompexní číslo $g(s) = a + bi$
  - jaká je hodnota křivky pro parametr t? Stačí natočit kolečko o $t \times s$. Otáčet už umíme!

$$f(t) = (\cos(t \times s \times 2\pi) + \sin(t \times s \times 2\pi)i) \times g(s) \tag{4}$$

Fourierova transformace

- A jak že se to počítá? (začneme jednodušším inverzem, tedy křivka $\implies$ kolečka)
  - máme $g(s)$ a zajímá nás pohyb puntíku, tedy poloha při parametru t neboli $f(t)$
  - rychlost s, poloměr a počáteční úhel představuje kompexní číslo $g(s) = a + bi$
  - jaká je hodnota křivky pro parametr t? Stačí natočit kolečko o $t \times s$. Otáčet už umíme!

$$f(t) = (\cos(t \times s \times 2\pi) + \sin(t \times s \times 2\pi)i) \times g(s) \tag{4}$$

  - a co když je koleček n? A s různými rychlostmi? Poloměry a úhly? Sčítáme!

Fourierova transformace

- A jak že se to počítá? (začneme jednodušším inverzem, tedy křivka $\implies$ kolečka)
  - máme $g(s)$ a zajímá nás pohyb puntíku, tedy poloha při parametru t neboli $f(t)$
  - rychlost s, poloměr a počáteční úhel představuje kompexní číslo $g(s) = a + bi$
  - jaká je hodnota křivky pro parametr t? Stačí natočit kolečko o $t \times s$. Otáčet už umíme!

$$f(t) = (\cos(t \times s \times 2\pi) + \sin(t \times s \times 2\pi)i) \times g(s) \tag{4}$$

  - a co když je koleček n? A s různými rychlostmi? Poloměry a úhly? Sčítáme!

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} (\cos(t \times s_j \times 2\pi) + \sin(t \times s_j \times 2\pi)i) \times g(s_j) \tag{5}$$

Fourierova transformace

- A co když je koleček n? A s různými rychlostmi? Poloměry a úhly? Sčítáme!

Fourierova transformace

- A co když je koleček n? A s různými rychlostmi? Poloměry a úhly? Sčítáme!

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} (\cos(t \times s_j \times 2\pi) + \sin(t \times s_j \times 2\pi)i) \times g(s_j) \quad (6)$$

Fourierova transformace

- A co když je koleček n? A s různými rychlostmi? Poloměry a úhly? Sčítáme!

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} (\cos(t \times s_j \times 2\pi) + \sin(t \times s_j \times 2\pi)i) \times g(s_j) \quad (6)$$

- A nespočetně koleček?

Fourierova transformace

- A co když je koleček n? A s různými rychlostmi? Poloměry a úhly? Sčítáme!

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} (\cos(t \times s_j \times 2\pi) + \sin(t \times s_j \times 2\pi)i) \times g(s_j) \quad (6)$$

- A nespočetně koleček?

$$f(t) = \int_{s \in \Re} (\cos(t \times s \times 2\pi) + \sin(t \times s \times 2\pi)i) \times g(s) ds \quad (7)$$

Fourierova transformace

- A co když je koleček n? A s různými rychlostmi? Poloměry a úhly? Sčítáme!

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} (\cos(t \times s_j \times 2\pi) + \sin(t \times s_j \times 2\pi)i) \times g(s_j) \quad (6)$$

- A nespočetně koleček?

$$f(t) = \int_{s \in \Re} (\cos(t \times s \times 2\pi) + \sin(t \times s \times 2\pi)i) \times g(s) ds \quad (7)$$

- ta dá!

Fourierova transformace

- A co samotná DT?

Fourierova transformace

- A co samotná DT?
  - máme křivku f a hledáme k ní soustavu koleček s

Fourierova transformace

- A co samotná DT?
  - máme křivku f a hledáme k ní soustavu koleček s
  - zajímá nás komplexní čísla u koleček a rychlosti

Fourierova transformace

- A co samotná DT?
  - máme křivku f a hledáme k ní soustavu koleček s
  - zajímá nás komplexní čísla u koleček a rychlosti

$$g(s) = \int_{s\in\Re} (\cos(-t\times s\times 2\pi)+\sin(-t\times s\times 2\pi)i)\times f(t)ds \quad (8)$$

Fourierova transformace

- A co samotná DT?
  - máme křivku f a hledáme k ní soustavu koleček s
  - zajímá nás komplexní čísla u koleček a rychlosti

$$g(s) = \int_{s \in \Re} (\cos(-t \times s \times 2\pi) + \sin(-t \times s \times 2\pi)i) \times f(t)ds \quad (8)$$

- A kde je takové to $e^{-ts2\pi i}$?

Fourierova transformace

- A co samotná DT?
  - máme křivku f a hledáme k ní soustavu koleček s
  - zajímá nás komplexní čísla u koleček a rychlosti

$$g(s) = \int_{s \in \mathfrak{R}} (\cos(-t \times s \times 2\pi) + \sin(-t \times s \times 2\pi)i) \times f(t) ds \quad (8)$$

- A kde je takové to $e^{-ts2\pi i}$?
  - Taylorův polynom a rozvoj...

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad (9)$$

Fourierova transformace

- A co samotná DT?
  - máme křivku f a hledáme k ní soustavu koleček s
  - zajímá nás komplexní čísla u koleček a rychlosti

$$g(s) = \int_{s \in \mathfrak{R}} (\cos(-t \times s \times 2\pi) + \sin(-t \times s \times 2\pi)i) \times f(t) ds \tag{8}$$

- A kde je takové to $e^{-ts2\pi i}$?
  - Taylorův polynom a rozvoj...

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \tag{9}$$

  - Eulerův vzorec

$$e^{ix} = \cos(x + i\sin(x)) \tag{10}$$

Fourierova transformace

- A co samotná DT?
  - máme křivku f a hledáme k ní soustavu koleček s
  - zajímá nás komplexní čísla u koleček a rychlosti

$$g(s) = \int_{s\in\Re} (\cos(-t\times s\times 2\pi)+\sin(-t\times s\times 2\pi)i)\times f(t)ds \quad (8)$$

- A kde je takové to $e^{-ts2\pi i}$?
  - Taylorův polynom a rozvoj...

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad (9)$$

- Eulerův vzorec

$$e^{ix} = \cos(x + i\sin(x)) \quad (10)$$

, a tedy...

Fourierova transformace

$$g(s) = \int_{t \in \Re} (\cos(-t \times s \times 2\pi) + \sin(-t \times s \times 2\pi)i) \times f(t)dt \quad (11)$$

$$= \int_{t \in \Re} e^{-ts2\pi i} \times f(t)dt \quad (12)$$

Fourierova transformace

$$g(s) = \int_{t \in \Re} (\cos(-t \times s \times 2\pi) + \sin(-t \times s \times 2\pi)i) \times f(t)dt \quad (11)$$

$$= \int_{t \in \Re} e^{-ts2\pi i} \times f(t)dt \quad (12)$$

- Proč?
  - pro zkrácení zápisu...
  - aby to líp (chytřeji) vypadalo...
  - pro zmatení nepřítele, ...

Fourierova transformace

Co jsme tedy zjistili?

- Fourierova transformace *nějak* dovoluje rozložit křivky, se kterými se muže těžko operovat na *stavební prvky*
- Kolečka, která křivku kreslí jsou lehce upravovatelné, jednoduše se s nimi zachází
- FT se *kouká za* obraz samotný, poskytuje jiný náhled

A nyní od koleček ke zpracování signálu a obrazu...

Fourierova transformace

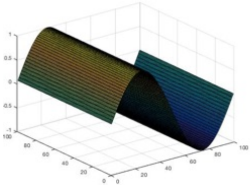
- Obvykle ve 1D zpracování signálu zapisujeme:
  - F(k) je *obraz*
  - f(ω) je původní *signál*

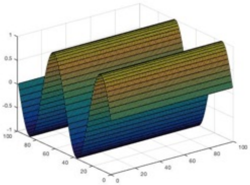
$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-2\pi i k \omega} d\omega \tag{13}$$

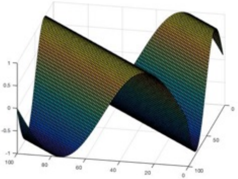
$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{2\pi i \omega k} dk \tag{14}$$

- Bázové funkce jsou siny a cosiny
- Někdy fourierův obraz zapisuje třeba jako $\hat{f}$ a pro reálné číslo ξ

Bázová funkce

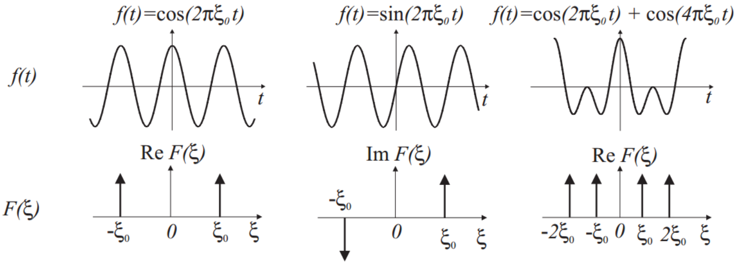






Fourierova transformace

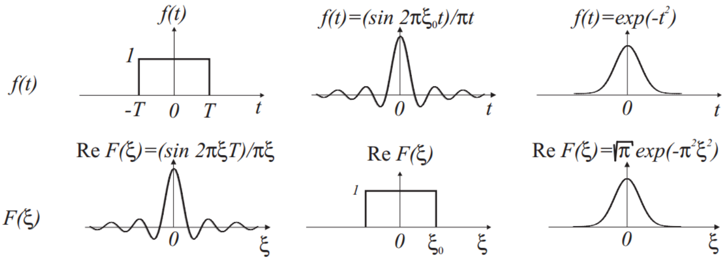
- Začíná to být zajímavé...
- Nekonečný signál $\Longleftrightarrow$ dva δ pulzy!



kosínus | sínus | směs dvou kosínů

Fourierova transformace

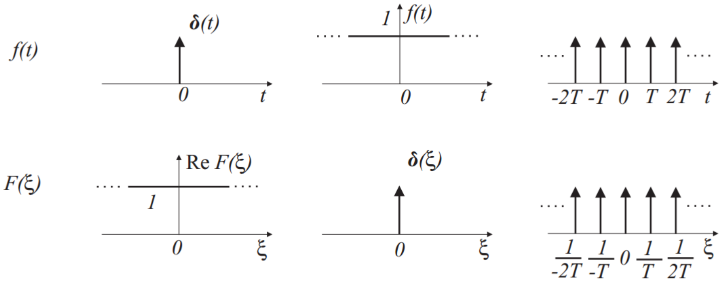
- a netriviální...
- Konečný signál $\iff$ nekonečná řada sinů (Re)
  - proč nekonečný? A skutečně nekonečný?



obdélník v t | obdélník v ξ | Gaussián

Fourierova transformace

- Diracův impuls



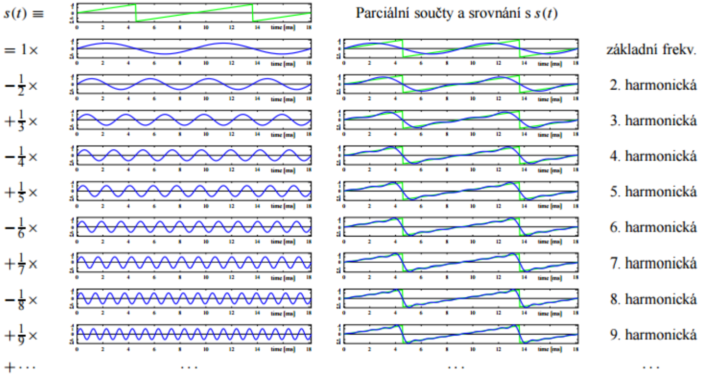
Dirac

konstanta

∞ posloupnost Diraců

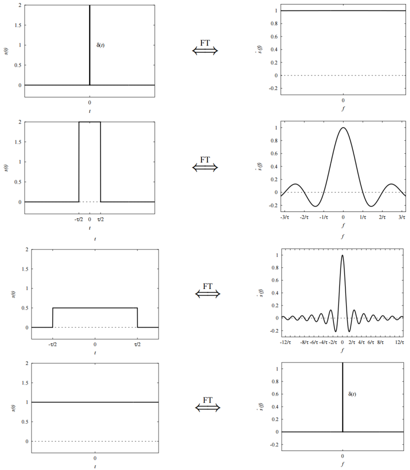
Fourierova transformace

- Skládaní z harmonických obrazů



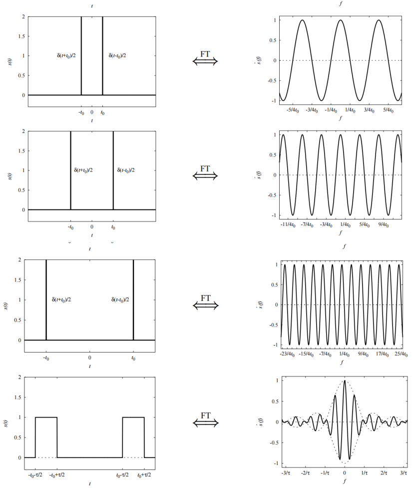
Fourierova transformace

- Co děje s obrazem
  - při změně délky signálu?



Fourierova transformace

- Co děje s obrazem
  - při změně frekvence signálu?



Fourierova transformace

- A ve 2D:
  - F(u,v) je *obraz, komplexní spektrum*, udává váhy jednotlivých harmonických složek
  - f(x,y) je původní *signál*, obrázek

$$F(u,v) = \iint_{\Re^2} f(x,y) e^{-2\pi i(ux+vy)} dxdy \tag{15}$$

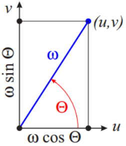
$$f(x,y) = \iint_{\Re^2} F(u,v) e^{2\pi i(ux+vy)} dudv \tag{16}$$

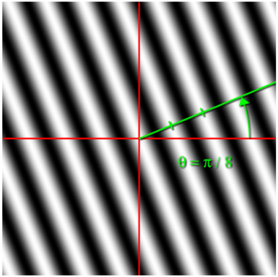
Fourierova transformace

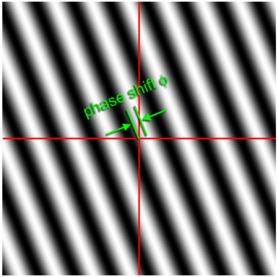
- Bázová funkce je 'vlnitý plech' $\sin$ a $\cos$ ve $2D$
- $f(x,y)$ je tedy lineární kombinací jednoduchých harmonických složek $e^{2\pi i(xu+yv)}$

  \- $\cos$ je reálná a $\sin$ imaginární složka

$$\omega = \sqrt{u^2+v^2},\ u = \omega\cos\Theta,\ v = \omega\sin\Theta,\ \Theta = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right).$$

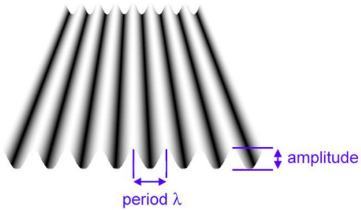


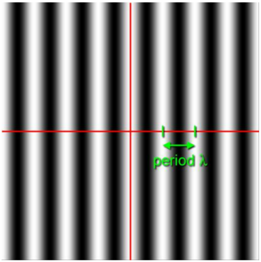




Fourierova transformace

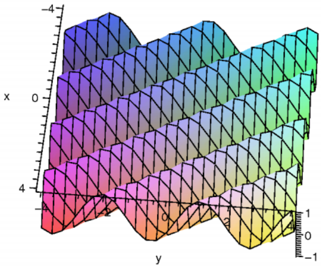
- Bázová funkce je 'vlnitý plech' $\sin$ a $\cos$ ve $2D$
- $f(x, y)$ je tedy lineární kombinací jednoduchých harmonických složek $e^{2\pi i(xu+yv)}$
  - $\cos$ je reálná a $\sin$ imaginární složka



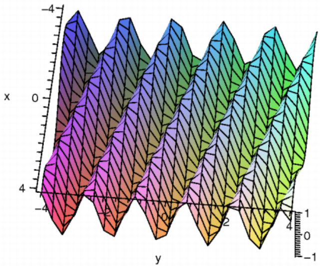


Fourierova transformace

- Báze



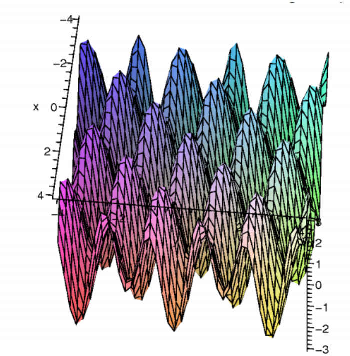
$\sin(3x + 2y)$



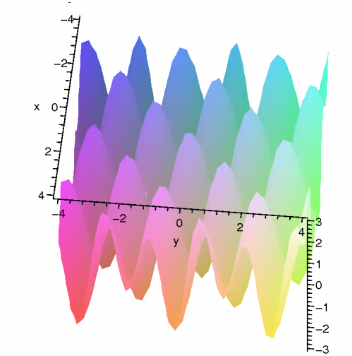
$\cos(x + 4y)$

Fourierova transformace

- Báze



$\sin(3x+2y)+\cos(x+4y)$



jen jiné zobrazení

Fourierova transformace - spektrum

- Fourierův obraz $F(u,v)$ je *funkcí* komplení proměnné
- Komplexní spektrum

$$F(u,v) = R(u,v) + iI(u,v) \tag{17}$$

- Amplitudové spektrum

$$|F(u,v)| = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)} \tag{18}$$

- Fázové spektrum

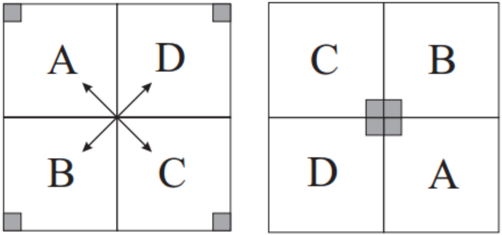
$$\phi(u,v) = tan^{-1}\frac{I(u,v)}{R(u,v)} \tag{19}$$

- Výkonové spektrum

$$P(u,c) = |F(u,v|^2 \tag{20}$$

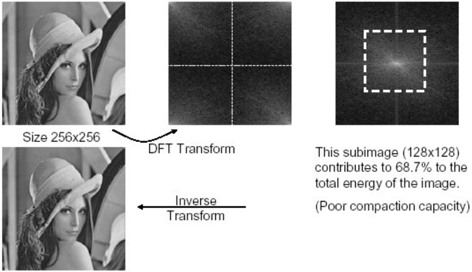
Fourierova transformace

- Spektrum (obraz) je názorné zobrazovat centrovaně
  - optický střed je ve středu obrázku
  - nízké frekvence se přesunou do středu po kvadrantech
  - obvykle implementováno (fftshift v matlabu, ...)
  - *vždy* předpokládáme centralizované zobrazení



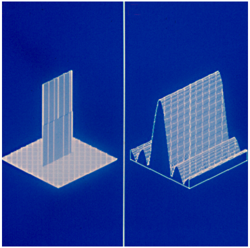
Fourierova transformace

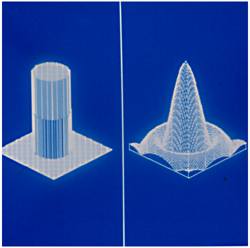
- Spektrum (obraz) je názorné zobrazovat centrovaně
  - optický střed je ve středu obrázku
  - nízké frekvence se přesunou do středu po kvadrantech
  - obvykle implementováno (fftshift v matlabu, ...)
  - *vždy* předpokládáme centralizované zobrazení

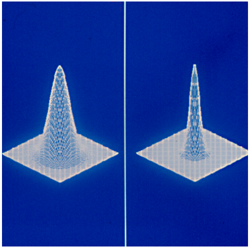


Fourierova transformace

- Základní transformace ve 2D

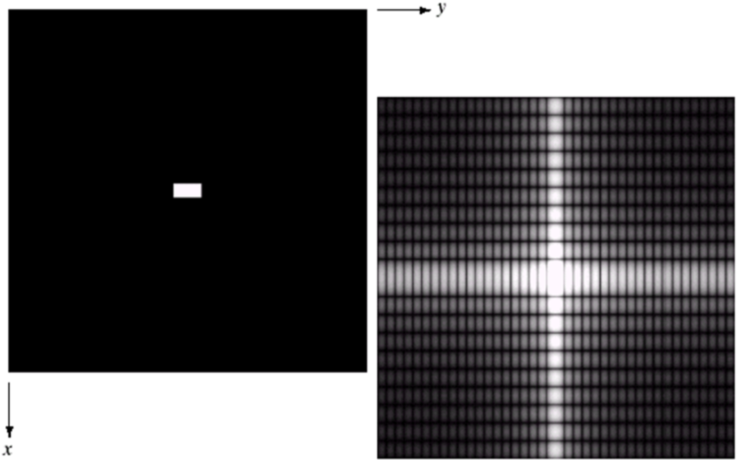






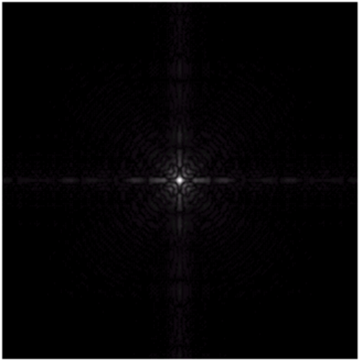
Fourierova transformace

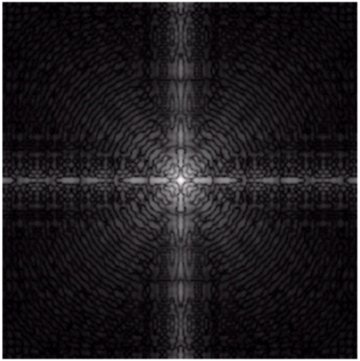
- Základní transformace ve 2D - všimnete si prohození délky a šířky



Fourierova transformace

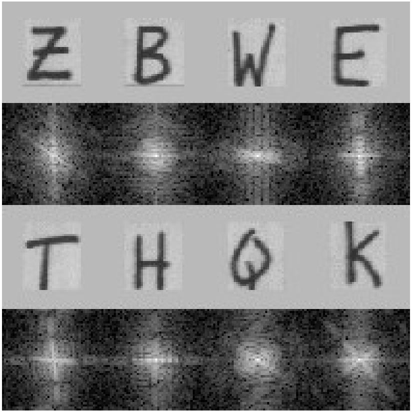
- Zvyrázenní složitějšího obrazu amplituda vs. log(amplituda + 1)





Fourierova transformace

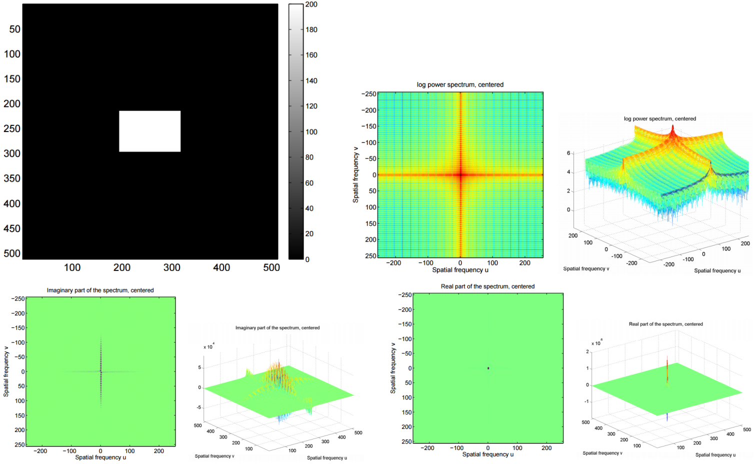
- FT nětերých písmen



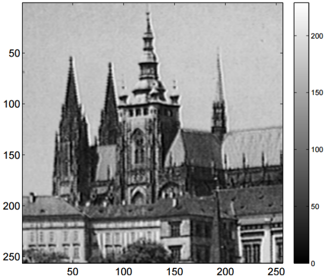
Fourierova transformace

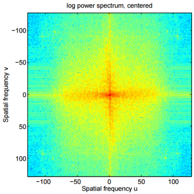
- A co ty komplexní čísla? To jsou přeci parametry!
  - Amplituda
  - Fáze
  - a dohromady je to výkonové spektrum (power spectrum)
  - co nese víc informace? Amplituda, nebo fáze?

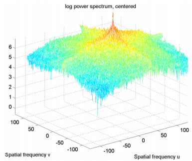
Fourierova transformace

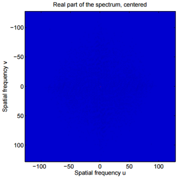


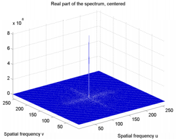
Fourierova transformace

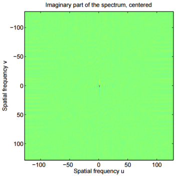


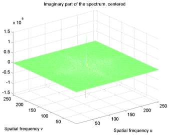




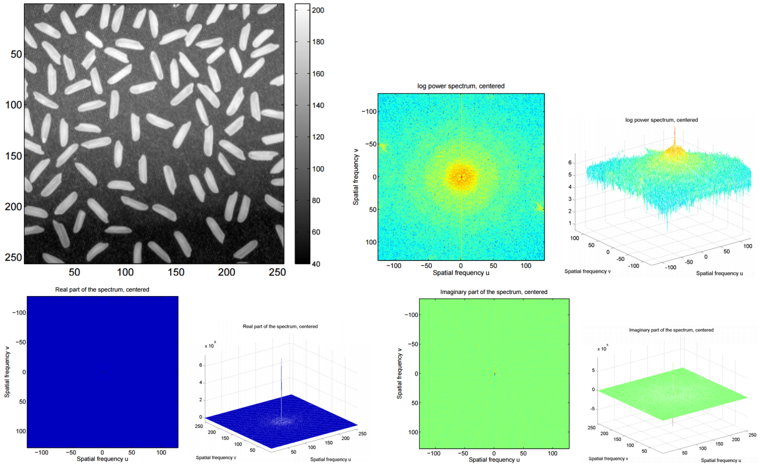








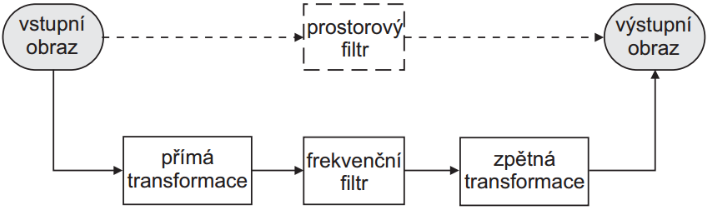
Fourierova transformace



Filtrace ve frekvenční oblasti

$$F(f * g) = F(f)F(g) \tag{21}$$

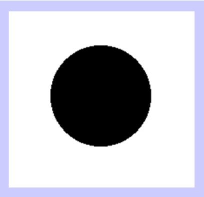
- konvoluce přechází v prostý násobek per pixel!



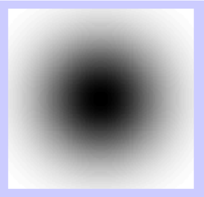
Filtrace ve frekvenční oblasti

- $F(f \star g) = F(f)F(g)$

high pass

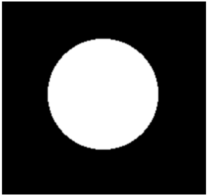


g. high pass

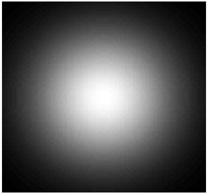


band pass

low pass

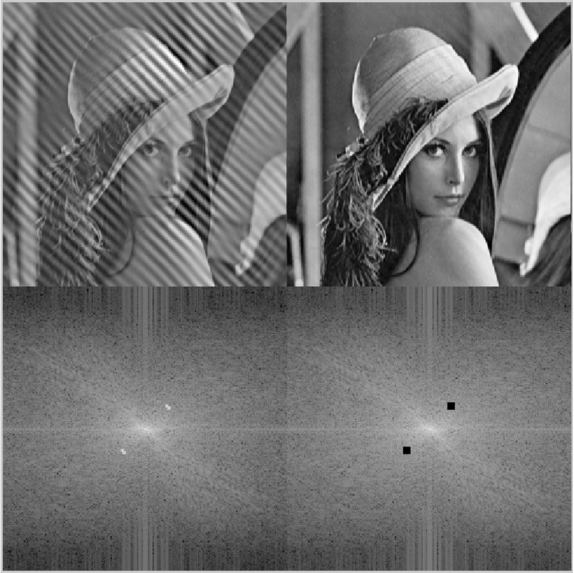


g. low pass

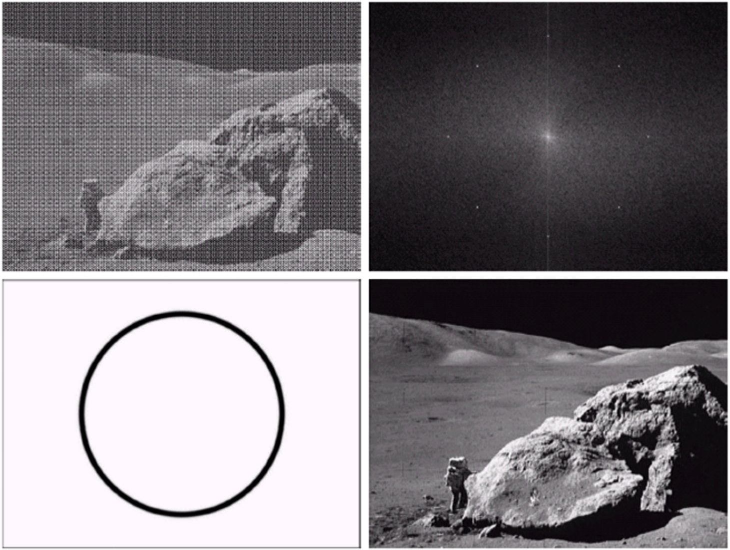


directional

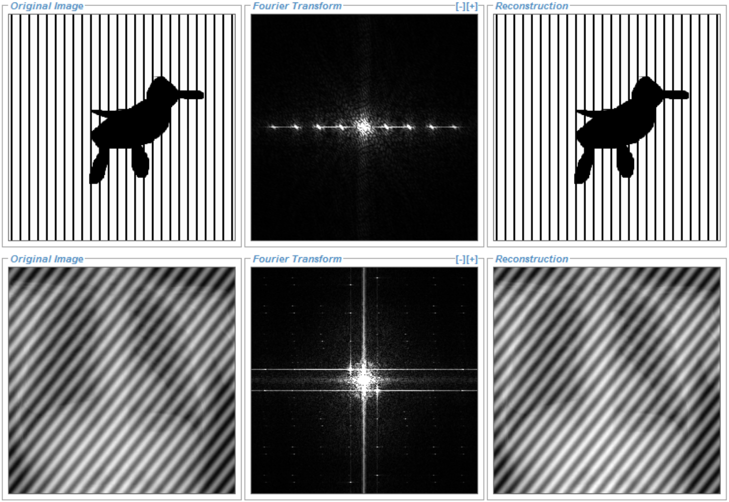
Použití



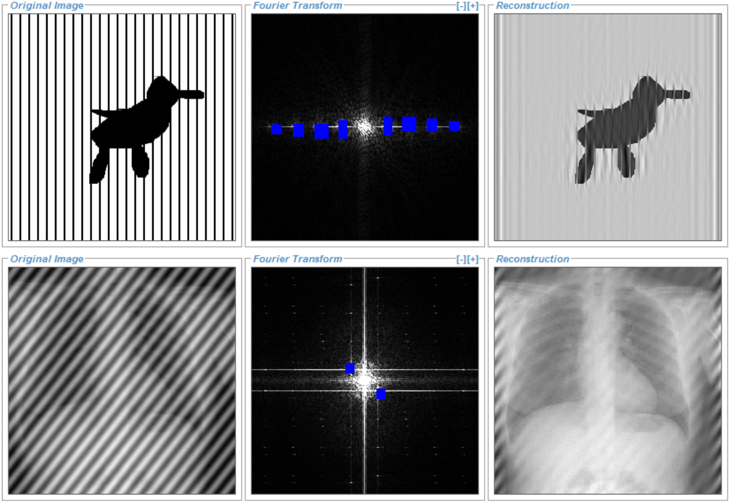
Použití



Použití


Original Image
Fourier Transform
[-][+]
Reconstruction
Original Image
Fourier Transform
[-][+]
Reconstruction

Použití


Original Image
Fourier Transform
[-][+]
Reconstruction
Original Image
Fourier Transform
[-][+]
Reconstruction

Reálný obraz

- Mnoho jevů degraduje obraz *systematicky*
- Naměřený (pozorovaný) signál $y(t)$

$y(t) =$

Reálný obraz

- Mnoho jevů degraduje obraz *systematicky*
- Naměřený (pozorovaný) signál $y(t)$
- Naměřený (pozorovaný) signál je původní signál $x(t)$, který byl *nějak* pokažen.

$y(t) = x(t) + ?$

Reálný obraz

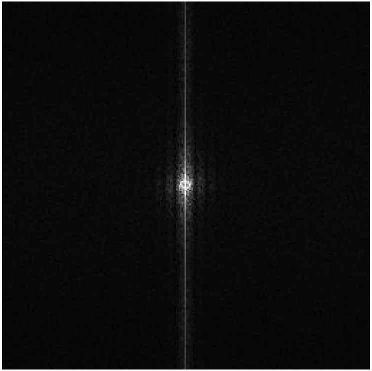
- Mnoho jevů degraduje obraz *systematicky*
- Naměřený (pozorovaný) signál $y(t)$
- Naměřený (pozorovaný) signál je původní signál $x(t)$, který byl *nějak* pokažen.
- Obraz byl rozmazán - konvolucí!

$y(t) = x(t) + h(t)$?

Reálný obraz

- Mnoho jevů degraduje obraz *systematicky*
- Naměřený (pozorovaný) signál $y(t)$
- Naměřený (pozorovaný) signál je původní signál $x(t)$, který byl *nějak* pokažen.
- Obraz byl rozmazán - konvolucí!

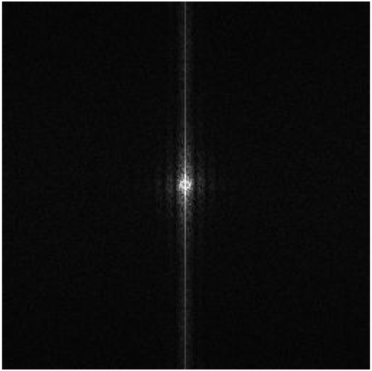
$y(t) = x(t) + h(t)$?

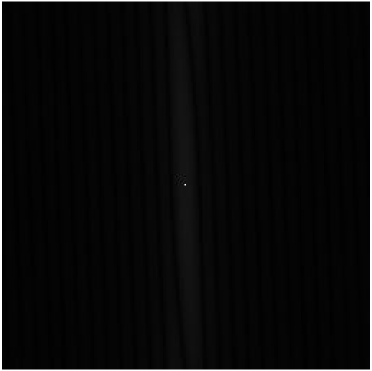


Reálný obraz

- Mnoho jevů degraduje obraz *systematicky*
- Naměřený (pozorovaný) signál $y(t)$
- Naměřený (pozorovaný) signál je původní signál $x(t)$, který byl *nějak* pokažen.
- Obraz byl rozmazán - konvolucí!

$$y(t) = (x * h)(t)$$

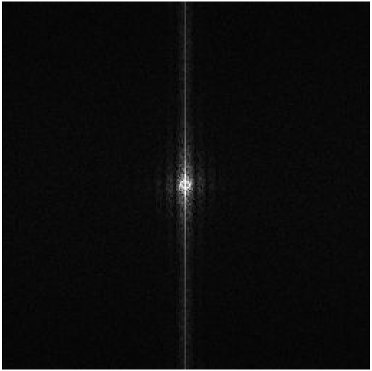


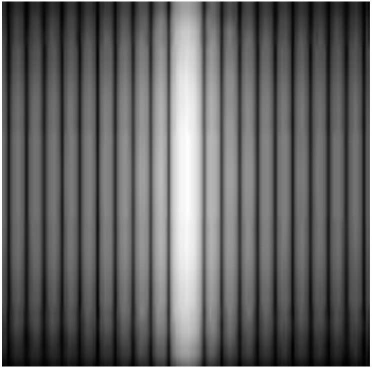


Reálný obraz

- Mnoho jevů degraduje obraz *systematicky*
- Naměřený (pozorovaný) signál $y(t)$
- Naměřený (pozorovaný) signál je původní signál $x(t)$, který byl *nějak* pokažen.
- Obraz byl rozmazán - konvolucí!

$$y(t) = (x * h)(t)$$

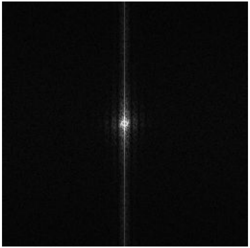
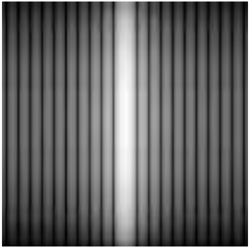
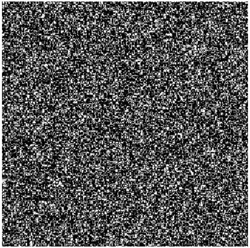




Reálný obraz

- Mnoho jevů degraduje obraz *systematicky*
- Naměřený (pozorovaný) signál $y(t)$
- Naměřený (pozorovaný) signál je původní signál $x(t)$, který byl *nějak* pokažen.
- Obraz byl rozmazán - konvolucí!

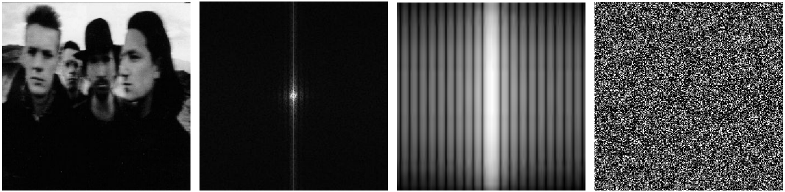
$$y(t) = (x * h)(t) + n(t)$$

Reálný obraz

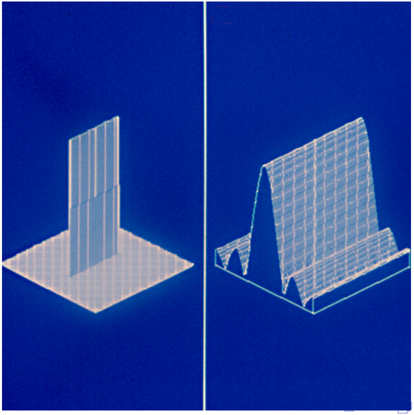
- Mnoho jevů degraduje obraz *systematicky*
- Naměřený (pozorovaný) signál $y(t)$
- Naměřený (pozorovaný) signál je původní signál $x(t)$, který byl *nějak* pokažen.
- Obraz byl rozmazán - konvolucí!

$$y(t) = (x * h)(t) + n(t)$$



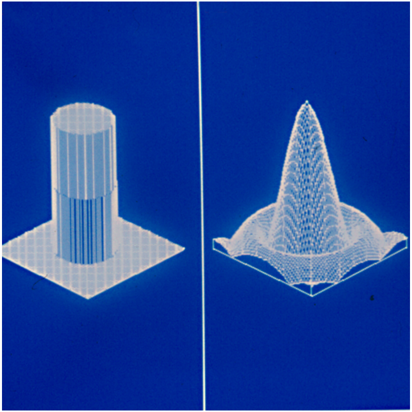
Wienerův filtr

- Mnoho jevů degraduje obraz *systematicky*
- Pohyb (motion blur)
  - jeden bod se rozmázne do křivky (zjednodušeně usečky)
  - jak vypadá Fourierův obraz takového rozmáznutí?
  - ale to už přece známe!



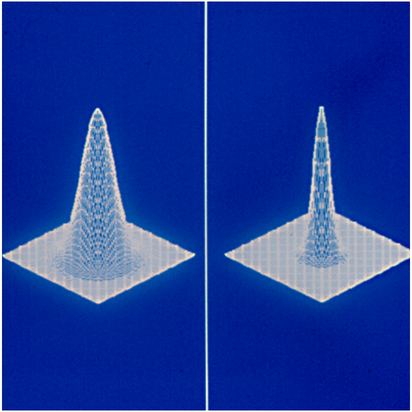
Použití

- Out-of-focus



Použití

- Atmospheric turbulence



Jak to funguje?

- Tyto distorze obrazu jsou jen obdobou konvoluce, ty se dá lehce řešit ve frekvenční oblasti násobením...
- Známý jev lze odstranit pokud známe jeho parametry
  - tomu říkáme *impulsní odezva* (jak by se zobrazil jeden bod)
- Wienerův filtr $y(t) = (h * x)(t) + n(t)$
  - * je konvoluce
  - $x(t)$ je původní signál
  - $h(t)$ je neznámé impulstní odezva (PSN)
  - $n(t)$ je aditivní nezávislý šum
  - $y(t)$ je pozorovaný signál (pokažený obrázek)

Jak to funguje?

- Chceme najít $g(t)$ aby jsem mohli odhadnout $x(t)$ jako $x(t) = (g * y)(t)$ (minimalizací střední chyby)
- Wienerova dekonvoluce

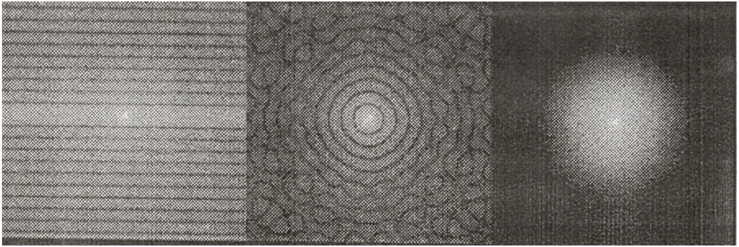
$$G(f) = \frac{H^*(f)S(f)}{\|H(f)\|^2 S(f) + N(f)} \tag{22}$$

$G(f)$ a $H(f)$ jsou fourierovy obrazy funkcí y a h s frekvencí f, $S(f)$ je střední hodnota power spektra $x(t)$, $N(f)$ pak šumu $n(t)$, hvězdičkou je označena koplexní konjugace

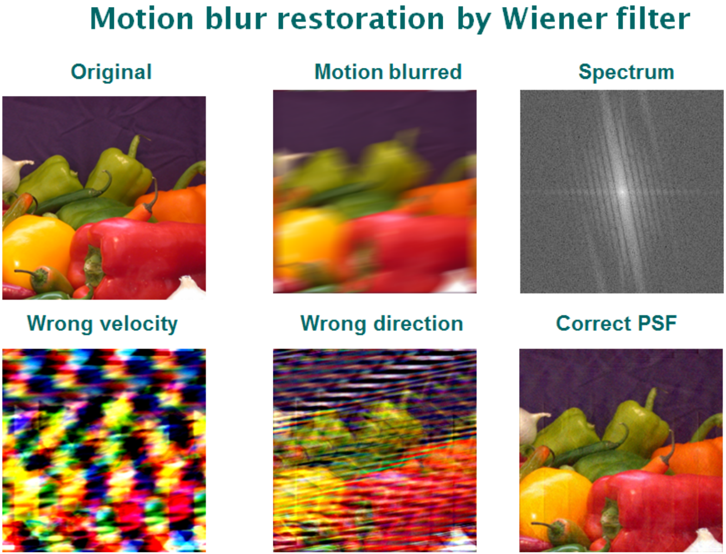
Použití

- V podstatě odstranujeme tyto typy funkcí z $G(f)$ ovšem s neznámými parametry...

motion blur out-of-focus atm. turbulence

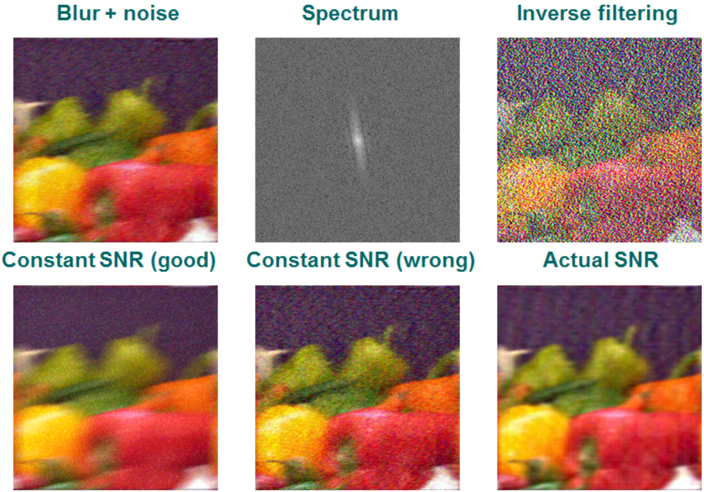


Použití


Motion blur restoration by Wiener filter
Original
Motion blurred
Spectrum
Wrong velocity
Wrong direction
Correct PSF

Použití

Motion blur restoration by Wiener filter

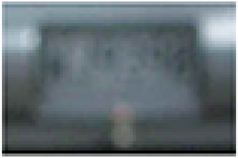


Použití

Licence plate recognition

Použití

Licence plate recognition



Použití

Licence plate recognition