Přípravný kurz matematiky

Tomáš Kalvoda[1]

Zimní semestr 2023/2024, 23. listopadu 2023

[1] KAM FIT ČVUT, tomas.kalvoda@fit.cvut.cz

Vysázeno pomocí LaTeX
Zdroj připraven pomocí WooWoo verze 0.4.0 a FIT PDF Template v0.2.4
zdrojový kód a hlášení chyb

Obsah

1 Úvod

Než se pustíme do hlavního výkladu, je vhodné čtenáře nejprve seznámit s cíli a smyslem tohoto kurzu a tohoto studijního textu. V tomto úvodu postupně rozebereme některé problémy s kterými studenti při příchodu do prvního ročníku bojují a k jejichž překonáním se tento kurz snaží studentům pomoci.

1.1 Nástrahy prvního ročníku a jak na ně

Pro řadu studentů středních škol bývá přechod na vysokou školu problematický. Zejména v prvních ročnících lze na vysokých školách dlouhodobě sledovat zvýšenou studijní neúspěšnost. Její příčiny jsou mnohé a na tomto místě tuto tématiku nebudeme do hloubky rozebírat (od toho zde jsou odborné publikace, viz např. [7]). Tento text se snaží budoucí studenty prvního ročníku připravit na to, co je čeká (nejen) v matematických předmětech a pomoci jim tak překonat nástrahy prvního ročníku.

Autorova zkušenost s mnohaletou výukou v prvním ročníku FIT ČVUT ukazuje na následující dva nejzásadnější problémy, s kterými se studenti musí často vyrovnat.

Problém děr v základních znalostech

Jedním z účelů středoškolské matematiky je dát studentům nutný společný základ znalostí, na kterém se dá dále stavět. Bohužel se ukazuje (na katedře máme velké množství důkazního materiálu), že tyto základy jsou u některých studentů poměrně děravé a při dalším zatížení se zhroutí. Uvedeme dva konkrétní příklady ilustrující tento problém.

V prvním ročníku se budeme mimo jiné zabývat pojmem „složitosti algoritmů“. Některé algoritmy mají třeba „logaritmickou složitost“ a jiné „polynomiální složitost“. Během studia této látky nemůžeme ztrácet čas lámáním si hlavy nad tím, co to je ten „logaritmus“ a co to je „polynom“. Tyto funkce bychom již měli důvěrně znát. To, nad čím si máme lámat hlavu, je koncept „složitosti“ samotný. Při čtení těchto řádek textu také nemusíte dohledávat, co které písmenko znamená.

Podobně nelze při počítání příkladů[1] bojovat s tím, jak se sčítají zlomky, nebo dělat fatální chyby v algebraických úpravách, či zcela zkolabovat při jakémkoliv výskytu trigonometrických funkcí. Tyto základy je nutné ovládat a v matematických předmětech prvního ročníku skutečně předpokládáme, že průměrnému studentovi nedělají problémy. Samozřejmě je možné, že nějakou takovou chybu student udělá. Je ale nutné umět takovýto elementární přešlap odhalit a rozhodně ho nedělat *systematicky*.

[1] Vyjma příkladů na počítání se zlomky.

Jednou z motivací pro vznik tohoto textu je proto právě shrnutí těchto základů. Přípravný kurz matematiky z tohoto důvodu probíhá ještě před začátkem prvního ročníku. Studentům silně doporučujeme tento text (a celý kurz) projít a konfrontovat s ním své znalosti.

Problém změny přístupu

Druhý problém je skrytějšího charakteru a studentům a studentkám často trvá déle, než si ho uvědomí (pokud vůbec). Středoškolská matematika se v dnešní době z různých důvodů soustřeďuje více na počítání příkladů a opakování postupů. Často je tato činnost sugestivně označována jako „praxe“, i když se skutečným praktickým použitím matematiky nemá zas tolik společného[2]. Podrobněji se touto problematikou budeme zabývat v kapitole č. 2.

Ve vysokoškolské matematice se do popředí více dostane to, co se na střední škole označuje jako „teorie“, případně obávané „důkazy“. Vlastně se člověk musí více vrátit do svých dětských let, kdy tak rád ještě používal slovíčko „proč“. *Proč* uvedený postup v řešení příkladu funguje? *Proč* je toto tvrzení pravdivé? Znakem „matematiky“ je, že před své studenty pouze nepředkládá údajně pravdivá tvrzení a fakta, ale že i ukazuje za jakých předpokladů jsou tato tvrzení skutečně pravdivá a jak spolu vzájemně souvisí.

Jedním z hlavních přínosů matematiky je způsob jakým se sama buduje. Nejprve se jasně definují potřebné pojmy[3] a následně se kriticky zkoumají jejich vztahy a vlastnosti. Platnost matematických tvrzení je pak odvozena od logických zákonů, ne od vnější autority (např. učitele). Právě tento způsob uvažování (tj. ne počítání konkrétních příkladů!) přispělo k rozmachu vědy a technologie během vědecké revoluce během 16. století. Samozřejmě dále existují konkrétní praktické „aplikace“ matematických teorií v reálném světě (například[4] teorie čísel v šifrování komunikace mezi PC (RSA), teorie matematické optimalizace ve strojovém učení a plánování, Fourierova analýza a wavelety v kompresi (MP3, JPEG, atd.), atd.).

Co to znamená pro milého čtenáře? Zejména to, že v BI-DML, BI-LA1 a dalších předmětech je důležité vědět *proč* se daný příklad počítá tak jak se počítá. Pochopení tohoto způsobu uvažování mu může významně zjednodušit osvojení si látky a následně i absolvování předmětu. Nových pojmů a tvrzení může být na první pohled mnoho, pokud je člověk vnímá jednotlivě, pochopení vztahů a souvislostí mezi nimi však významně tuto komplexitu snižuje.

1.2 Obsah kurzu a použité konvence

Jak již bylo řečeno, tento text slouží k připomenutí základních pojmů a výsledků středoškolské matematiky, které by studenti předmětu matematických předmětů prvního ročníku měli již dobře znát a ovládat. V prvním semestru se studenti setkají s *Lineární algebrou 1* (BI-LA1.21) a *Diskrétní matematikou a logikou* (BI-DML.21). V druhém semestru pak s *Matematickou analýzou 1* (BI-MA1.21). Kurz *Přípravný kurz matematiky* (BI-PKM) probíhá elektronickou formou před začátkem zimního semestru akademického roku 2023/2024.[5]

Text je rozdělen do několika kapitol sdružujících tematicky podobnou problematiku. Účelem textu není systematický výklad středoškolského učiva, ale jeho připomenutí, zdůraznění

[2]Ihned ale druhým dechem dodáváme, že toto počítání příkladů je důležité, ale to z toho důvodu, aby si student osahal práci se základními matematickými objekty.

[3]Tyto pojmy jsou často motivovány právě praktickým zájmem.

[4]Záměrně výběr příkladů omezujeme na oblast úžeji související s IT odvětvím.

[5]Tečkovaná číselná hodnota za kódem předmětu upozorňuje na předměty akreditované v roce 2021 a často ji budeme pro jednoduchost vynechávat.

některých důležitých souvislostí, či vyložení látky z nového úhlu pohledu. Z tohoto důvodu na sebe různé kapitoly a jejich části nemusí plynule logicky navazovat.

Po těchto úvodních odstavcích se budeme v druhé kapitole zabývat významem *důkazů* a celkovým matematickým přístupem k řešení problémů. V třetí kapitole probereme zvyklosti týkající se matematického značení a vlastnosti množinových či číselných operací. Čtvrtá kapitola pak představí stručný přehled tzv. elementárních funkcí, zejména polynomů, racionálních (lomených) funkcí, trigonometrických funkcí, exponenciálních a logaritmických funkcí. Poslední kapitola shrnuje základní způsoby popisu některých rovinných útvarů pomocí analytické geometrie.

Konvence použité v textu

Nyní ještě shrneme některé konvence používané v tomto textu. Pro čtenářovo pohodlí je text doplněn seznamem použitých symbolů. Na samém konci dokumentu je pak uveden i relativně podrobný rejstřík pojmů a několik odkazů na použité zdroje či zajímavé publikace.

Významné rovnice v tomto dokumentu jsou číslovány v rámci kapitol. Rovnice (3.5) je pátou číslovanou rovnicí ve třetí kapitole. Stejný způsob číslování používáme i v případě obrázků a tabulek. Obrázkem 1.3 je tedy myšlen třetí obrázek v první kapitole. Pouze odkazy na rovnice jsou tradičně označeny kulatými závorkami. V elektronické verzi dokumentu jsou tyto odkazy aktivní (lze na ně kliknout a prohlížeč se postará o posun stránek). Při psaní desetinných míst používáme desetinnou tečku místo desetinné čárky. Tím se sice odchylujeme od české konvence, ale je vysoce pravděpodobné, že čtenář při svém budoucím styku s programovacími jazyky bude požívat desetinnou tečku místo čárky.

Externí odkazy jsou v tomto dokumentu označeny namodralou barvou, interní pak barvou načervenalou. Text je doplněn množstvím otázek nad kterými by se měl čtenář alespoň na chvíli zastavit a zamyslet. Odpovědi na tyto otázky lze nalézt na konci dokumentu. Otázky jsou číslovány průběžně v celém dokumentu.

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval doc. Ing. Štěpánu Starostovi, Ph.D., Mgr. Janu Starému, Ph.D., Ing. Danielu Vašatovi, Ph.D. a Mgr. Lence Novákové za připomínky a náměty. Pokud laskavý čtenář v následujících řádcích odhalí chyby nebo narazí na nejasnosti, pak jde vždy o chybu autora, který bude rád za upozornění nejlépe pomocí emailu, nebo pomocí issue trackeru.

2 Matematika není jen počítání

> *If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.*
>
> *John von Neumann*

Po průchodu střední školou na řadě studentů ulpívá názor, že matematika není nic jiného než sada výpočetních postupů (algoritmů) a že na každou úlohu existuje známý výpočetní postup vedoucí k jejímu řešení. Tato představa je však poměrně vzdálená od skutečnosti. Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře s realističtějším pohledem na věc.

2.1 Počítání a abstrakce

Matematika dala světu řadu algoritmů, výpočetních postupů, které lze vzít a přímo použít na konkrétní, často velmi úzce zaměřený, problém. Za všechny uveďme třeba rychlou Fourierovu transformaci (FFT, uplatnění při zpracování signálu, např. v mp3 formátu), Simplexový algoritmus (uplatnění v algoritmech strojového učení a optimalizačních úlohách), nebo kryptosystémy jako např. RSA založené na teorii čísel, či kryptosystémy založené na eliptických křivkách (ECC), atd. Další zajímavé příklady algoritmů může čtenář nalézt v článku [2].

Otázkou ovšem je, jestli lze při studiu IT matematiku zredukovat pouze na tento její výpočetní aspekt, tak jak se zpravidla děje na středních školách. Nejen dle autora tohoto textu není vhodné takovouto kastraci vysokoškolské matematiky provádět hned z několika důvodů. Pokusme se na tomto místě zmínit alespoň ty nejdůležitější.

Matematika je velmi úzce spjata s tzv. vědeckou metodou poznání, o které lze bez velkého přehánění prohlásit, že tvoří základ naší civilizace. Častým lidským cílem je hledání hlubšího porozumění světa a řešení různých problémů. Matematika v této činnosti nehraje roli pouhého početního stroje. Přístup, který se ukázal jako extrémně plodný, spočívá v několika krocích. Nejprve je nutné problém analyzovat, rozebrat ho na důležité části a zkoumat jejich vztahy a chování. Typicky dojde k vytvoření matematického modelu, který (více či méně) dobře vystihuje náš problém. Následně se v rámci tohoto abstraktního modelu snažíme dobrat k závěrům a poznání původního problému, provádíme porovnání předpovědí modelu a reality pomocí experimentu. Jako jednoduchý příklad zmiňme Galileovo zkoumání padajících těles, jehož výsledkem byla jednoduchá a kompaktní matematická formulka popisující závislost výšky na čase daného tělesa.

Podobně abstraktně lze (a velmi často se tak děje) uvažovat nad programováním, tedy tvorbou programů řešících zadaný problém. Typicky je programátor postaven před reálný problém, který nejprve musí analyzovat a popsat. Navrhnout jeho řešení, rozmyslet si jak o problému uvažovat (vytvořit například podrobný objektový či databázový model; rozmyslet si jak problém popsat pomocí vhodných funkcí a metod, jaké vhodné datové struktury použít, atd.). Následně se pustí do implementace, řešení. Bez dobrého návrhu založeného na porozumění problému je nepravděpodobné, že by jeho řešení bylo kvalitní.

K tomu jak program logicky strukturovat – jak abstraktně uvažovat nad jednotlivými částmi kódu – slouží několik programovacích paradigmat, například

- procedurální (např. C, Fortran),
- objektové (např. C++, Java),
- funkcionální (např. Lisp, Haskell),
- logické (např. Prolog).

Není náhodou, že prakticky všechna uvedená paradigmata jsou úzce inspirována matematickým způsobem myšlení. Cílem těchto snažení je vnést do řešení daného problému řád a usnadnit tak jeho porozumění. Výše uvedená paradigmata představují různé abstraktní způsoby jak o modelech a algoritmech *uvažovat* a *přemýšlet*.

Dále je dobré si uvědomit, že některé praktické úlohy nemají efektivní řešení, tedy řešení ve středoškolském smyslu „proveď tyto početní úkony a toto podtrhni, je to tvůj výsledek“. To může být pro studenty čerstvě přicházející ze středních škol malý šok. Školní příklady jsou ovšem hodně speciální druh problémů často vybraných právě tak, aby měly hezké řešení. Neexistence efektivního řešení přesněji znamená neexistenci vhodného algoritmu, který by danou úlohu efektivně řešil. Opět lehce překvapivě, tento fakt nemusí být vždy na škodu, ba naopak může mít dobré využití, například v počítačové bezpečnosti, kde přesně takové problémy (jako například faktorizace přirozených čísel) hrají zásadní roli.

Příklad 2.1: Uvažme například úlohu rozhodnout o přirozeném čísle n zda-li je prvočíslem či složeným číslem. Můžeme se snažit hledat faktory (netriviální dělitele) čísla n, to je ale těžká úloha. Na druhou stranu lze efektivně rozhodnout o neprvočíselnosti čísla n *aniž bychom jeho faktory znali.* Na tomto pozorování je založen výše zmíněný kryptosystém RSA.

Na závěr této abstraktněji laděné části textu si dovolme ještě jednu poznámku. Absolventi vysoké školy by měli zejména umět přemýšlet o tom, co, jak a proč dělají. Práce, kterou lze automatizovat, byla, je a bude prováděna více či méně nemyslícími stroji. Současný rozmach AI také ukazuje, že na důležitosti pro člověka získává právě schopnost abstrakce a širšího uchopení problému. Dále by měli absolventi mít chuť se učit a poznávat nové věci. U studentů a studentek IT toto platí několikanásobně, *řádově několikanásobně.* Nikdy nevíte, před jaký problém budete v budoucnu postaveni, ani nevíte, kam se za dobu vašeho studia posunou v oboru používané technologie a nástroje. Nejnovější JavaScript framework, který během vašeho studia může být horkou novinkou, bude v den vaší promoce beznadějně zastaralý. Matematika, jakožto systematický a logický způsob uvažování, vám v tomto snažení může jen pomoci.

Navíc je matematika *krásná.*

2.2 Struktura matematického textu

Pojďme se nyní v několika odstavcích podívat, jakým způsobem jsou strukturované tyto a další materiály, na které během studia jistě ještě narazíte. Matematický text bývá zpravidla rozdělený do definic, vět a důkazů. Cílem tohoto opatření je zpřehlednění a zdůraznění logické struktury textu. Čtenář často narazí na následující typy „prostředí“:

- **Definice** : Na tomto místě se zavádějí (definují) nové pojmy. Ve více neformálním výkladu mohou být nové pojmy zavedeny i přímo v textu (toho často využíváme i v těchto poznámkách). Smyslem definice je jednoznačně ukotvit (definovat) pojem. Autor definice si se čtenářem domlouvá co si pod daným pojmem má od toho okamžiku představovat. To je velmi důležité. Bez jasně definovaných pojmů hrozí nebezpečí, že se dva lidé nebudou moci shodnout, protože každý mluví o něčem jiném, ale oba pro to používají stejný název.

- **Věta** : Důležité tvrzení, které si zaslouží číselné označení v textu, či dokonce jméno po svých údajných autorech.

- **Důkaz** : Prostředí obsahující důkaz předcházejícího tvrzení (lemmatu, věty, důsledku). Poněvadž je typicky delší než formulace věty, bývá jeho konec označen symbolem pro konec[1] důkazu. Nejčastěji používáme Halmosův symbol náhrobku □. Čtenář také může často narazit na zkratku Q.E.D. pocházející z latinského *quod erat demonstrandum* („což bylo dokázati“). O důkazech se čtenář podrobněji dočte v sekci 2.3.

Dále se lze setkat ještě s následujícími:

- **Lemma** [2]: Pomocné tvrzení, které samo o sobě nemá širší uplatnění[3], ale použije se v důkazu některé z bezprostředně následujících vět.

- **Důsledek** : Tvrzení velmi přímočaře plynoucí z předešlých vět, přeformulování předchozích vět do jiného kontextu. Typicky s velmi jednoduchým důkazem (prakticky jen přímočaré použití – tedy aplikace – předešlých vět).

Poznámka 2.1: Na tomto místě si dovolím jednu krátkou poznámku o častém studentském nešvaru. Poslední dobou se opakovaně setkávám s pozoruhodným slovním spojením „definovat větu“. To ukazuje na fundamentální nepochopení ze strany uživatelů tohoto nesmyslného dvousloví. Dotyční pravděpodobně slovo „definovat“ mylně chápou ve smyslu „doslovně opsat“. „Definovat větu“ z principu nelze. Můžete definovat pojem a poté vyslovit jisté tvrzení o tomto pojmu, tedy větu. Tu ale musíte dokázat, ověřit zda platí. Tvrzení v matematice naštěstí nelze definovat.

Čtenáři může být bližší notace pomocí XML jazyka. Strukturu matematického textu si lze pak představovat třeba následovně:

```
<definice>
  ...
</definice>
<veta>
  ...
</veta>
<dukaz>
  ...
</dukaz>
```

[1] Představte si ukončovací XML tag.

[2] Lemma je rodu středního.

[3] Výjimky potvrzují pravidlo, například známé „Rieszovo lemma“ nebo „Riemann–Lebesgueovo lemma“, jsou velmi důležité samy o sobě, ale přesto nadále nesou označení „lemma“. Je tomu tak z historických důvodů. Tato tvrzení byla v původních článcích použita jako lemmata, ale později se využila i v řešení dalších problémů.

Očividně, prezentovat čtenáři text tímto způsobem by bylo typograficky ztřeštěné. Je ovšem vhodné podotknout, že zdrojový kód tohoto dokumentu právě tento přístup využívá.

Většina matematických textů samozřejmě není složená pouze z výše uvedených dílků. K pohodlí čtenáře jsou často uváděny i doplňující komentáře, příklady či diagramy, vysvětlující další kontext týkající se probírané tématiky.

S tímto strukturovaným přístupem k psaní se lze setkat nejen v matematice, ale i v další technické a odborné literatuře. Z oblasti IT zmiňme například žánr dokumentace, či specifikace standardů, kde se klade velký důraz na logickou strukturu textu.

2.3 Co je to důkaz?

Slovíčko **důkaz** vyvolává v řadě studentů iracionální odpor. V této kapitole se budeme snažit jeho pověst očistit. Důkaz není nic jiného než logický argument zajišťující platnost daného tvrzení. Je to odpověď na zvídavou otázku „proč?“ V této kapitole se pokusíme nastínit význam tohoto pojmu v širších souvislostech a ukážeme si některé jednoduché standardní důkazy.

Studenti na naší fakultu často přicházejí s názorem, že důkazy přeci nejsou potřeba, že stačí znát pouze tvrzení vět. To je však velmi krátkozraký přístup zejména z následujících důvodů.

- Jak již bylo řečeno, důkaz není nic jiného než logický argument. Vychází se z předpokladů a logickými kroky se dochází k závěrům. Studium důkazu proto zlepšuje nejen znalost zkoumaných objektů, ale i argumentační a vyjadřovací schopnosti. Podporuje rozvoj umění jednoznačně popsat a vyjádřit myšlenku. Tato schopnost se hodí i ve spoustě dalších s matematikou přímo nesouvisejících situacích, například pokud máte přesvědčit své kolegy o správné funkčnosti vašeho programu.

- Důkaz studentovi odhaluje, proč dané tvrzení platí. Je to pomyslný logický certifikát jeho správnosti. V důsledku znalosti důkazu bývá i snadnější zapamatovat si dané tvrzení (např. jeho předpoklady). Bez studia důkazů student přichází o chápání souvislostí a uchyluje se k učení vět zpaměti (což pro něj není nijak obohacující[4] ani zvládnutelné).

- Řada důkazů, zejména tzv. konstruktivních, dává přímo k dispozici návod (algoritmus) na řešení daného problému.

- O správnosti důkazu, resp. pravdivosti dokazovaného tvrzení, nerozhoduje nadřazená autorita (učitel, profesor, guru) ale jen a pouze logika. Je-li tvrzení dokázáno, je dokázáno navždy. Tato absolutnost matematiky je krásná. Pythagorova věta platí v Euklidovské geometrii navěky a nikdo na tom už nic nezmění.

- Stará a „pravdivá“ anekdota říká, že „matematika bez důkazů“[5] je jako fotbal bez míče. Důkaz, resp. činění závěrů podle logických pravidel, je skutečně ústředním objektem, bez kterého by celé snažení nemělo smysl – nevěděli bychom co je a co není pravda.

Zkrátka matematika bez důkazů nedává příliš smysl!

[4] Vyjma tréninku paměti.
[5] Což ale pak skutečně není matematika.

2.4 Ukázka několika častých typů důkazů

V této sekci si ukážeme několik jednoduchých důkazů známých a důležitých tvrzení. S dalšími důkazy se čtenář bude moci seznámit v dalších kapitolách tohoto textu. V kapitole 3.6 budeme toto umění dále procvičovat při dokazování několika součtových formulek.

Než se pustíme do našeho prvního důkazu je potřeba si osvěžit několik pojmů, které se v dokazovaném tvrzení budou objevovat. Připomeňme si nejprve pojmy *racionálního* a *iracionálního* reálného čísla[6].

Definice 2.1: Reálné číslo x, které je podílem dvou celých čísel, nazýváme **racionální**. Reálné číslo, které není racionální, nazýváme **iracionální**.

Dále připomeňme pojmy *soudělnosti* a *nesoudělnosti* celých čísel.

Definice 2.2: Celá čísla m a n nazýváme **soudělná**, právě když mají společného dělitele většího než 1. Pokud celá čísla m a n nejsou soudělná, nazýváme je **nesoudělná**.

Pro úplnost ještě dodejme definici dělitelnosti celých čísel využitou v předchozí definici.

Definice 2.3: Celé číslo m **dělí** celé číslo n (symbolicky píšeme $m|n$), právě když existuje celé číslo k takové, že $n = k \cdot m$.

Důkaz sporem

Následující větu dokážeme pomocí tzv. **sporu**. Myšlenka důkazu sporem je jednoduchá. Jeden z logických axiomů říká, že každé tvrzení T je buď pravdivé, nebo nepravdivé. Ukážeme-li tedy, že logický opak (negace) tvrzení T je nepravdivý, pak je původní tvrzení T pravdivé. Ona nepravdivost se projeví právě oním sporem. Pojďme rovnou k názorné ukázce.

Věta 2.1: Číslo odmocnina ze 2, které označujeme symbolem $\sqrt{2}$, je iracionální.

Poznámka 2.2: Poznamenejme, že $\sqrt{2}$ je takové jediné kladné reálné číslo, které splňuje vztah $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

Důkaz iracionality $\sqrt{2}$. Předpokládejme opak, tedy že $\sqrt{2}$ *je* racionální. Protože se navíc jedná o kladné číslo, existují dle definice racionality dvě přirozená a nesoudělná celá čísla p a q splňující

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}\,.$$

Odtud ale plyne[7] rovnost

$$2 = \frac{p^2}{q^2}, \quad \text{čili} \quad 2q^2 = p^2.$$

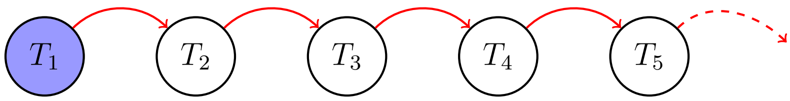
Vidíme, že p je sudé (jinak bychom měli rovnost sudého a lichého čísla, což je nemožné[8]), tedy[9] $p = 2k$, kde k je přirozené. Dosazením do rovnice výše a po vydělení obou stran číslem 2 dostáváme rovnost $q^2 = 2k^2$. Použijeme-li stejný argument znovu, dostáváme nutně, že i q

[6] Pozor, později během studia si ukážeme, že tato definice není zcela korektní. Aby byla, museli bychom nejprve říci, co je to množina reálných čísel. Tu nelze definovat jako množinu všech racionálních a iracionálních čísel, tím bychom se dostali do pasti kruhové argumentace. V tento okamžik se s ní ještě spokojíme, stejně jako jste činili doposud.

[7] Pokud $a = b$, potom $a^2 = b^2$.

[8] Tato závorka je v podstatě samostatný mikro důkaz sporem.

[9] Tato rovnost vyjadřuje sudost čísla p.



Obrázek 2.1: Schéma důkazu matematickou indukcí. Místo abychom dokázali všechna T_n, $n = 1, 2, \ldots$, dokážeme T_1 a indukční krok, tj. tvrzení $T_n \Rightarrow T_{n+1}$ (červené šipky).

je sudé. Čísla p i q jsou proto soudělná (obě dělitelná číslem 2). Takováto situace ale nemůže nastat. Předpokládali jsme totiž nesoudělnost p a q, a tím jsme dospěli ke sporu.

Čísla p a q nemohou být *současně* soudělná i nesoudělná. Tato očividná nepravdivost představuje spor. □

Shrňme si tedy ještě jednou princip důkazu sporem. Chceme se přesvědčit o pravdivosti jistého tvrzení T (tj. chceme ho dokázat). Ukážeme, že logický opak (negace) tvrzení T neplatí. Tím pádem nutně platí T.

Otázka 2.1: Která z následujících čísel jsou racionální a která iracionální? Proč?

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \sin\frac{\pi}{4}, \quad \sin\frac{\pi}{6}.$$

Otázka 2.2: Které z následujících dvojic čísel jsou soudělné a které nesoudělné? Proč?

1. 7 a 6 330 079,
2. $\sqrt{2}$ a 2,
3. 5 192 311 a 36 551.

Důkaz matematikou indukcí

Dále si ukážeme důkaz **matematickou indukcí**. Tento typ důkazu se často používá v případě, že máme nekonečně mnoho tvrzení očíslovaných přirozenými indexy[10], tedy například $T_1, T_2, T_3, \ldots$ Důkaz se provede ve dvou krocích:

1. dokaž první tvrzení, zde T_1,
2. pro libovolné přirozené n dokaž tzv. **indukční krok**: pokud platí T_n, pak platí T_{n+1}.

Grafické znázornění tohoto postupu je na obrázku 2.1. Indukčnímu kroku odpovídají červené šipky. První bod, důkaz T_1, je naznačen modrou barvou.

Matematickou indukci lze přirovnat k bourání hada sestaveného z dominových kostek. Každá kostka domina představuje „výrok“ a může se nacházet ve dvou stavech. Kostka může být stojící, nebo spadlá (podobně výrok může být pravdivý, nebo nepravdivý). Pokud chceme zjistit, jestli námi sestavený dominový had celý spadl, máme dvě možnosti. Můžeme zkontrolovat každou z kostek a zjistit, jestli spadla[11]. Druhou možností je zkontrolovat tyto skutečnosti:

- první kostka spadla,

[10] Konkrétní způsob očíslování není podstatný, stejně tak není podstatné, od jakého čísla začínáme. Pouze předpokládáme tzv. spočetnost: tvrzení musí být alespoň možné přečíslovat přirozenými čísly.

[11] To by odpovídalo faktickému důkazu všech tvrzení.

- dvě sousední kostky jsou umístěny v takové vzdálenosti, že pokud spadne první (ta blíže první kostce), pak spadne i její soused (tento bod představuje analog indukčního kroku).

Potom automaticky víme, že spadly všechny kostky. Zdůrazněme podstatný rozdíl v těchto argumentačních přístupech. Druhý způsob (tj. matematická indukce) kontroluje stav pouze první kostky, u ostatních se nedívá jestli stojí nebo ne, pouze jsou-li u sebe dostatečně blízko.

Ukažme si důkaz pomocí matematické indukce na tzv. binomické větě. V tvrzení věty používáme zkrácený zápis součtu, tzv. sumační notaci, o které se čtenář může podrobněji dozvědět v sekci 3.6. O kombinačních číslech se zmíníme v sekci 3.7.

Věta 2.2 (Binomická)**:** Pro reálná čísla a a b a celé nezáporné číslo n, tj. pro $a, b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$, platí rovnost

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{2.1}$$

Poznámka 2.3: Nejjednoduší interpretace vzorce (2.1) spočívá v explicitním roznásobení závorky na levé straně a určení koeficientů členů ve výsledném součtu (kombinační čísla). Díky binomické větě tak nemusíme výrazy typu $(a+b)^n$ *sami ručně otrocky roznásobovat* (pokud je z nějakého důvodu chceme v roznásobeném tvaru).

Důkaz binomické věty matematickou indukcí. Ověřme, že zkoumaná rovnost platí pro první uvažované n, tj. pro $n = 0$. Levá strana (2.1) je rovna $(a+b)^0 = 1$ a pro pravou stranu téže rovnosti platí

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Rovnost $1 = 1$ je jistě pravdivá.

Předpokládejme nyní, že rovnost (2.1) platí pro dané $n \in \mathbb{N}_0$. Ověřme, zda-li platí (2.1) pro $n+1$ místo n. Chceme tedy zjistit, zda-li *za uvedeného předpokladu* platí i rovnost

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

Přímočarým výpočtem dostáváme[12]

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n &\overset{!}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} = \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} = \\
&= \underbrace{\binom{n}{n}a^{n+1}b^{n+1-(n+1)}}_{a^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n}\Bigg(\underbrace{\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}}_{\binom{n+1}{k}}\Bigg)a^k b^{n+1-k} + \\
&+ \underbrace{\binom{n}{0}a^0 b^{n+1-0}}_{b^{n+1}} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}
$$

V rovnosti označené vykřičníkem jsme použili indukční předpoklad (platnost vztahu pro n) a dále jsme jen prováděli algebraické operace. Pokud přečteme začátek a konec tohoto výpočtu uvidíme, že jsme odvodili vztah pro $n+1$, což bylo naším cílem. □

Tvrzení binomické věty obsahuje dobře známé algebraické „vzorečky“

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
\end{aligned}
$$

Tyto vzorce představují speciální případy binomické věty pro konkrétní volbu n (zde $n=2$ a $n=3$). Pro tato malá konkrétní n je možné tyto vzorce snadno alternativně ověřit pomocí roznásobení závorek, ale v tento okamžik je to zbytečné, přidělávali bychom si práci. Například pro první rovnost, tedy pro $n=2$ máme

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Tento výpočet efektivně dokazuje binomickou větu pro $n=2$. I když podobným způsobem ověříme platnost této věty pro $n=3$ nelze to považovat za důkaz binomické věty. Chyběl by nám důkaz pro $n = 3, 4, 5, \ldots$! Naštěstí jsme tato tvrzení dokazovat nemuseli, stačilo použít matematickou indukci.

Význam binomické věty lze dále demonstrovat na konkrétním příkladě (někdo by řekl „triku“). Představme si, že máme rychle z hlavy spočítat 48^2. Můžeme využít toho, že číslo 48 je blízko čísla 50, jehož druhá mocnina se snadno počítá. Konkrétně dle binomické věty máme

$$48^2 = (50-2)^2 = 50^2 - 2\cdot 50\cdot 2 + 4 = 2500 - 200 + 4 = 2304.$$

[12]Představte si, jak by vypadal zápis postupu níže *bez použití sumační notace*!

Otázka 2.3: Čemu se rovná součet prvních n lichých přirozených čísel? Tj. čemu se rovná součet

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{j=1}^{n} (2j - 1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Své tvrzení dokažte.

Přímý důkaz

Dalším typem důkazu je tzv. přímý důkaz. Takříkajíc bez oklik, přímočaře, z předpokladů odvodíme tvrzení. Uvažme následující větu.

Věta 2.3: Pro libovolná reálná a a b a $n \in \mathbb{N}_0$ platí rovnost

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}. \tag{2.2}$$

Důkaz. Mějme tedy $a, b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$. Máme dokázat rovnost (2.2). Vyjděme z pravé strany této rovnosti a postupnými algebraickými úpravami ji upravme až získáme levou stranu (2.2). Konkrétně

$$\begin{aligned}
(a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= a \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} - b \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = \\
&= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k} - b^n - \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k} = \\
&= a^n - b^n.
\end{aligned}$$

Jinak řečeno, po roznásobení sumy závorkou $(a - b)$ se drtivá většina členů vzájemně odečte a zbude pouze rozdíl $a^n - b^n$. □

Alternativně by bylo možné větu 2.3 dokázat i pomocí matematické indukce (proveďte!). Pod tvrzením věty 2.3 se skrývají známé speciální případy:

$$\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \\
a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2).
\end{aligned}$$

Tyto vzorce a obecný vzorec (2.2) se nám budou v budoucnu hodit (nejen) při výpočtu limit. V čem je věta 2.3 tak užitečná? Umožňuje nám vyjádřit rozdíl stejných mocnin dvou čísel pomocí rozdílu čísel samotných. Jinak řečeno, pokud máme nějakou informaci o rozdílu $a - b$, pak pomocí této věty lze něco usoudit i o rozdílu $a^n - b^n$.

Další aplikací této věty je snadné odvození vzorce pro součet prvních několika členů geometrické posloupnosti.

Poznámka 2.4: V dokázaném vzorci (2.2) je obsažen i vzorec pro součet prvních několika členů geometrické posloupnosti s prvním členem 1 a kvocientem q. Skutečně, uvážíme-li v tomto vzorci $a = q \neq 1$ a $b = 1$, pak dostaneme

$$q^n - 1 = (q-1)\sum_{k=0}^{n-1} q^k$$

a po vydělení nenulovým faktorem $q - 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Poznámka 2.5: Další užitečnou aplikací (2.2) je možnost „zbavit se odmocnin". Přesněji, představme si, že pracujeme s výrazem tvaru $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ a chtěli bychom využít naší znalosti samotného rozdílu $x - y$. Jak toho docílit? Stačí vzorec (2.2) použít ve tvaru

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$$

a položit $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$. Tím dostaneme

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\,,$$

přesně jak jsme chtěli. Nově vzniknuvší jmenovatel nás většinou netrápí, protože se v něm provádí součet, ne rozdíl. Podobnou úpravu lze udělat i pro vyšší odmocniny i různého řádu. Dále je tato úprava důležitá i z pohledu numerických výpočtů na počítači. Lze se pomocí ní alespoň trochu bránit tzv. katastrofickému krácení při odečítání podobně velkých hodnot ve strojové přesnosti.

2.5 Co není důkaz?

Předchozí část textu se zabývala otázkou co je to důkaz a obsahovala několik konkrétních ukázek důkazů. V této sekci vypíchneme časté omyly související s důkazy. Budeme se tedy zabývat tím co *není* důkaz.

„Důkaz" příkladem vs. protipříklad

Pravdivost obecného tvrzení nelze založit na několika konkrétních příkladech podporujících jeho pravdivost. Oproti tomu pravdivost tvrzení lze *vyvrátit* udáním i jenom jednoho **protipříkladu**[13].

Uveďme jako demonstrativní příklad tvrzení, s kterým přišel v roce 1650 Fermat[14]:

[13] Pokud vám někdo bude tvrdit, že všechna auta na celém světě mají modrou nebo zelenou barvu, jak ho nejlépe přesvědčíte o jeho omylu? Vyjdete na ulici a *ukážete* mu auto červené (nebo jiné než modré a zelené) barvy. Tj. vyvrátíte jeho tvrzení názornou demonstrací protipříkladu.

[14] Výraz a^{b^c} znamená a na b^c, to není výraz totožný s $(a^b)^c = a^{bc}$.

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ je číslo tvaru $2^{2^n} + 1$ prvočíslo.

Pierre de Fermat

Prozkoumáním hodnot výrazu $2^{2^n} + 1$ pro několik malých n dostáváme čísla: 3, 5, 17, 257, 65 537, která skutečně jsou prvočísla. Ověřili jsme platnost tohoto tvrzení pro prvních pět případů. Z toho ovšem *neplyne* pravdivost tvrzení pro *všechna* n! Skutečně, hned následující hodnota pro $n = 5$ není prvočíslo,

$$2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417. \tag{2.3}$$

Tento rozklad ve Fermatově době zřejmě nebyl znám. Rozklad v rovnici (2.3) je tedy **protipříkladem** k Fermatovu tvrzení uvedenému výše. Tento příklad Fermatovo tvrzení *vyvrací*. Jinak řečeno uvedené tvrzení *není* pravdivé.

Poznámka 2.6: Čísla tvaru $F_n = 2^{2^n} + 1$, kde n je přirozené číslo, která *jsou* prvočísla, se nazývají **Fermatova prvočísla**. V současnosti není známo žádné Fermatovo prvočíslo F_n s $n \geq 5$ a matematici se přiklánějí k hypotéze, že žádné další Fermatovo prvočíslo neexistuje. Toto tvrzení ale nebylo dokázáno, *úplná odpověď není známa*. Vidíte, jak moc se Fermat ve svém úsudku mýlil.

Samozřejmě, příklady podporující dané tvrzení jsou také užitečné. Mohou člověka i navést na důkaz obecného tvrzení. Nelze z nich ale odvodit pravdivost původního tvrzení. Jak již bylo zmíněno, nelze například dokázat binomickou větu 2.2 tím, že ověříme její tvrzení pouze pro $n = 1, 2, 3$. To nic neříká o $n = 4, 5, \ldots$

Od předpokladů k tvrzení

Dalším častým úkazem je nepochopení způsobu vedení důkazu. Znovu zopakujme, že cílem je z **předpokladů** logickými kroky dospět k **tvrzení** věty/lemmatu/důsledku. Pokud důkaz podrobně studujete, mělo by v něm být vidět kde a jak se předpoklady použily (není nic vtipnějšího než důkaz, v kterém se ani jednou neprojeví předpoklady věty).

Pokusme se tento jev ilustrovat na dalším poměrně často se vyskytujícím omylu. Pro jednoduchost uvažme velmi jednoduché tvrzení: *součet sudých čísel je sudé číslo*. Pro úplnost dále připomeňme, že celé číslo k nazýváme sudé, právě když ho lze vyjádřit ve tvaru $k = 2\ell$, kde ℓ je nějaké jiné celé číslo (toto byla definice sudosti celého čísla). Jako důkaz by pak leckteří studenti napsali: „když sečtu dvě sudá čísla, tak musím zase dostat sudé číslo." Je toto důkaz? *Samozřejmě není*, jde přeci pouze o zopakování toho co se má dokázat, jen se tvrdí, že ono tvrzení *musí* platit! I kdyby slovíčko *musí* bylo napsáno velkým písmem a krví, tak to nebude důvod pro pravdivost daného tvrzení (důkaz).

Správný (přímý) důkaz uvedeného tvrzení by vypadal takto: vezměme tedy dvě sudá čísla, třeba $a, b \in \mathbb{Z}$. Jsou sudá a tedy dle definice existují nějaká celá čísla k a ℓ splňující $a = 2k$ a $b = 2\ell$. Tudíž pro jejich součet podle distributivního zákona platí

$$a + b = 2k + 2\ell = 2(k + \ell),$$

Když si nyní uvědomíme, že $k + \ell$ je nějaké celé číslo, tak vidíme, že $a + b$ je skutečně dvojnásobek nějakého celého čísla a podle definice je tedy sudé!

Čtenář doufám nyní ocení rozdíl mezi „důkazem" a skutečným důkazem v předchozím odstavci. Názorně se zde na základě předpokladů, definice sudosti a vlastností celých čísel (distributivní zákon, uzavřenost vůči sčítání) ukázalo, že ono tvrzení je skutečně pravdivé. Je krásně vidět co je k platnosti onoho tvrzení potřeba a čtenáři je to náležitě vysvětleno. Argumentace není zahalena jen prostým výkřikem, že to přece musí být pravda (navíc ona to u spousty takových výkřiků ani pravda nebude).

Zřejmý důkaz

Na závěr upozorněme na význam slovíčka „zřejmý“. Tvrzení je **zřejmé**, právě když vás okamžitě napadne jeho důkaz. Ne protože mu bezmezně věříte, ale vlastně nevíte proč platí. Říci, že důkaz je zřejmý, bez znalosti onoho důkazu, je argumentační faul.

V matematických učebních textech často narazíte na situaci, kdy takovéto zřejmé důkazy nejsou explicitně uvedeny, ale je po čtenáři či čtenářce vyžadováno, aby důkaz sami doplnili. Cílem je donutit pasivního čtenáře skutečně otestovat své porozumnění látky. Typicky je k tomuto účelu zvoleno opravdu zřejmé tvrzení, tj. pokud čtenář správně chápe probíranou látku alespoň na elementární úrovni, neměl by mít s doplněním důkazu problém. Pokud s ním problém má, tak není důvod k panice. Je nutné se vrátit k hlavnímu textu a pokusit se vstřebat látku znovu, ujasnit si význam nových pojmů. Neschopnost takovýto důkaz provést ukazuje na nějakou mezeru v základních znalostech, která může být fatální v pozdějších partiích a je proto dobré si ji co nejdříve zaplnit.

Nepochopení není katastrofa, ale vlastně standardní stav, který nám dává příležitost k sebezdokonalení.

3 Základní pojmy

If I have seen further it is by standing on the shoulders of giants.

Isaac Newton

3.1 Poznámka k matematické notaci

Každý programovací jazyk vyžaduje dodržování správného zápisu kódu neboli **syntaxe**. Pokud programátor zvyklosti daného jazyka nedodržuje, může být jeho kód pro překladač (případně interpretr) nesrozumitelný, a tedy nepoužitelný. Ačkoliv matematika nemá žádný pevně kodifikovaný způsob značení[1], je dobré dodržovat některé zažité zvyklosti. V této podkapitole se proto pokusíme shrnout alespoň ty nejčastěji používané notační zvyklosti.

Poznámka 3.1: Často se u studentů setkávám s překvapením nad tímto stavem. Proč není matematická notace a terminologie jasně a globálně kodifikována? Ano, existuje mezinárodní standard ISO 80000-2, který se snaží některé symboly a pojmy zafixovat, ale není příliš rozšířený. Jednotné značení a názvosloví se nepoužívá jednak z historických důvodů, ale zejména i kvůli rozdílným potřebám různých matematických odvětví. Matematika je kreativní a živá, svázat ji ISO standardem nedává smysl. I v malířství a umění existuje spousta stylů využívajících různé nástroje k dosažení podobných výsledků. Podobně, proč neexistuje pouze jeden programovací jazyk? A je to dobře. Co ovšem platí globálně je právě logická struktura matematiky a způsob jakým se matematika buduje. Jinak řečeno, je poměrně jedno v jakých symbolech a v jakém jazyce mluvím, jde o to jakým *způsobem* a *jakými pravidly se řídím*. Je ovšem velmi vhodné v rámci daného textu/kurzu/knihy držet jednotnou notaci. To je konec konců smysl této kapitoly.

Rovnost a rovnice

Nejprve rozebereme význam veledůležitého symbolu **rovnosti** $=$. V programovacích jazycích i v matematickém zápisu hraje symbol $=$ zásadní roli. Bohužel v každé z těchto oblastí se používá trochu jiným způsobem, což může být velmi často matoucí.

V drtivé většině programovacích jazyků má symbol `=` význam tzv. **přiřazení**. Například řádek kódu

```
a = 2
```

často značí, že od této chvíle má jistá proměnná `a` hodnotu `2`. Podobně kód

```
a = a + 1
```

[1] A to je dobře.

počítači říká, že nová hodnota proměnné `a` má být stará hodnota proměnné `a` zvětšená o `1`. Dále při programování často narazíme na symbol `==`, který testuje skutečnou rovnost dvou objektů. Tedy například kód

```
a == b
```

je vyhodnocen jako pravdivý (`true`), pokud se objekty `a` a `b` rovnají[2]. V opačném případě je vyhodnocen jako nepravdivý (`false`).

V matematickém zápisu je situace o něco komplikovanější. V podstatě lze říci, že velmi závisí na *kontextu*, v jakém se symbol $=$ používá. Základní rolí symbolu $=$ je vyjádření **rovnosti** dvou *známých* objektů. Tímto způsobem je formulováno tvrzení, např.

$$a = b, \tag{3.1}$$

kde a a b jsou jisté definované objekty, které je buď pravdivé, nebo ne. Pro přirozené číslo 4 je rovnost $4 = 4$ pravdivá, ale pro čísla 4 a 3 je rovnost $4 = 3$ nepravdivá. V tomto významu má matematický symbol $=$ blízko k výše uvedenému programátorskému `==`.

Symbol $=$ se dále používá k zápisu **rovnice**. Například v rovnici

$$x^2 - 1 = 0 \tag{3.2}$$

označujeme pomocí x **neznámou**, tedy objekt, který je třeba určit tak, aby po jeho dosazení do rovnice (3.2) platila rovnost mezi levou a pravou stranou této rovnice. O takovýchto instancích x pak říkáme, že jsou **řešením** rovnice (3.2). V našem případě rovnice (3.2) jsou řešením čísla 1 a -1, libovolná další reálná čísla řešením nejsou. A opravdu, po dosazení 1 či -1 do rovnice (3.2) skutečně dostáváme rovnost $0 = 0$, která platí. Naproti tomu například po dosazení 2 za x získáme rovnost $3 = 0$, která je jistě nepravdivá[3].

Symbol $=$ se dále používá k značení přiřazení ve smyslu programátorském. Tento autorův záměr většinou snadno odhalíme z kontextu. Podívejme se podrobně na následující textovou ukázku.

> *Uvažujme obdélník o stranách délky $a = 3$ a $b = 4$. Označme délku úhlopříčky tohoto obdélníku symbolem c. Podle Pythagorovy věty platí rovnost $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, tedy v našem případě platí $c = 5$.*

První dvě použití symbolu $=$, označená červeně, jsou ve smyslu přiřazení. Od tohoto momentu mají symboly a a b příslušné hodnoty. V programátorské hantýrce bychom řekli, že proměnné a a b byly inicializovány. Druhá věta odstavce sice symbol $=$ neobsahuje, ale její význam je stejný, neboť přikládá jednoznačný význam symbolu c. Konečně v poslední větě se *tvrdí*, že modré rovnosti jsou pravdivé. Zde se už nejedná o přiřazení/definici/inicializaci, ale o platnost jistého vztahu mezi zavedenými objekty a, b a c.

Někdy se ke značení přiřazení používá symbolu $:=$. Zejména po tomto symbolu saháme, chceme-li čtenáře upozornit na zavedení nového objektu. Symbol na levé straně od $:=$ je pak *definován* výrazem na pravé straně od $:=$. Na tomto místě čtenáře upozorňujeme, že v CAS[4] Mathematica je význam probíraných symbolů ještě lehce odlišný. Podrobněji se této problematice věnujeme v kapitole č. 6.

[2] Význam rovnosti může záviset na konkrétním objektu, na jeho typu.

[3] Poznamenejme, že příklady uvedené v tomto odstavci sloužily pouze k vysvětlení vlastnosti „být řešením rovnice". Vůbec se nebavíme o tom, jak řešení efektivně hledat a jestli to vůbec pro zadanou rovnici lze. Více o tomto problému se dozvíte v BI-MA1.

[4] Computer Algebra System, tedy počítačový algebraický systém.

Značení proměnných

Shrňme nyní několik dalších notačních zvyklostí, které se snažíme v tomto dokumentu i v dalších matematických předmětech dodržovat. Ačkoliv je volba označení používaných objektů zcela v režii autora, je dobré řídit se následujícími nepsanými pravidly.

- Neznámé v rovnicích se označují písmeny z konce latinské abecedy, typicky například x, y, či z.
- Známé – definované – objekty či parametry problému se označují písmeny ze začátku latinské abecedy, například a, b, c, atd. Pro číselné hodnoty se často používá řecké abecedy, tedy $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$
- Pro **sčítací indexy** (viz níže podkapitolu č. 3.6) a celočíselné veličiny se často používá písmen i, j, k, ℓ, m nebo n. Pří používání písmena i je třeba dát pozor, aby nedošlo ke kolizi s imaginární jednotkou, z tohoto důvodu často označovanou též[5] i.
- Množiny se označují velkými písmeny $A, B, C, \ldots$ Body v rovině (prostoru) se také většinou označují velkými písmeny latinské abecedy.
- K parametrizaci geometrických objektů (přímky, kružnice, plochy atp.) se používají písmena r, s, t.
- Funkce většinou značíme písmeny f, g, či h.

Znovu zdůrazněme, že výše uvedené body nejsou absolutní. Vždy závisí na kontextu, když bez jakéhokoliv dalšího komentáře napíšeme symbol f, tak nevíme, jestli jde o funkci, číslo, nebo něco jiného.

Závorky

Dále připomeňme roli závorek v matematickém zápisu. Závorky používáme k označení argumentu funkcí (zobrazení), k upřesnění pořadí provádění operací či k značení intervalů a bodů. Bez použití závorek by řada algebraických výrazů nedávala smysl[6]. Ve zbytku této podkapitoly podrobněji probereme právě takové případy užití závorek.

Máme-li funkci f a bod a z definičního oboru funkce f, pak $f(a)$ označuje funkční hodnotu funkce f v bodě a. Přesněji, $f(a)$ je číslo, naopak f je abstraktní objekt typu funkce. Toto použití závorek tedy přesně odpovídá tomu, se kterým se setkáte v programovacích jazycích. Byly-li f a a předem definovány, význam výrazu $f(a)$ je: zavolej funkci f s argumentem a a vrať výsledek $f(a)$. Hodnotu a lze chápat jako vstup a $f(a)$ jako výstup funkce f. Graficky si tuto situaci můžeme představovat jako na obrázku č. 3.1.

Někdy se však mluví přímo o $f(x)$ jako o funkci. Tento úhel pohledu často používáme v případě, že chceme zároveň čtenáři sdělit, jak budeme označovat nezávisle proměnnou (zde x). V některých případech se závorky u argumentů funkcí vynechávají, zejména z důvodů

[5]Proto se imaginární jednotku snažíme aspoň typograficky odlišit, porovnejte i a i. Pro úplnost ještě poznamenejme, že zejména ve fyzikální (např. elektrotechnické) literatuře se imaginární jednotka často značí symbolem j, písmenko i je rezervováno pro okamžitou hodnotu proudu.

[6]Nebyla jednoznačně interpretovatelná. Uvažte například výraz $2 \cdot 3 + 5$. Bez zavedení *konvenční* priority operací *nelze* rozhodnout, zda-li se jedná o $2 \cdot (3 + 5)$ nebo $(2 \cdot 3) + 5$.

$$a \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(a)$$

Obrázek 3.1: Funkce f a její funkční hodnota. Na vstupu je a a na výstupu $f(a)$. Funkce f samotná je „černá skříňka“ zajišťující převod vstupu na výstup.

zlepšení čitelnosti a zjednodušení zápisu. Např. často píšeme $\sin\alpha$ místo $\sin(\alpha)$ nebo $\ln 2$ místo $\ln(2)$. Je však třeba opatrnosti, nebo může dojít k nedorozumění. Například výraz

$$\ln 2 \cdot 3 \tag{3.3}$$

by mohl být interpretován jako

$$\ln(2 \cdot 3) \quad \text{nebo} \quad \ln(2) \cdot 3.$$

Tato čísla samozřejmě *nejsou* stejná. Pomocí kapesního kalkulátoru[7] se snadno přesvědčíme, že přibližně platí následující rovnosti

$$\begin{aligned} &\ln(2 \cdot 3) = \ln(6) \approx 1.791\,759\,469\,23, \\ &\ln(2) \cdot 3 \approx 2.079\,441\,541\,68. \end{aligned}$$

Zvláště při „ručním“ počítání[8] mohou tyto nedůslednosti v zápisu a následné špatné interpretaci vést ke katastrofálním chybám. Proto je lepší multiplikativní faktory psát před funkcemi, výraz $3\ln 2$ už má jednoznačný význam, na rozdíl od výrazu uvedeném v (3.3).

Upozorněme ještě čtenáře, že pro některé funkce se používá speciální notace nevyžadující závorky. Například druhá odmocnina se značí $\sqrt{x}$, třetí odmocnina $\sqrt[3]{x}$, nebo absolutní hodnota $|x|$. Čtenáři je také jistě známa dolní (resp. horní) celá část reálného čísla x označovaná symbolem $\lfloor x \rfloor$ (resp. $\lceil x \rceil$).

Závorky se dále používají k upřesnění pořadí algebraických operací. Například výraz

$$\Big(a + (c/2)\Big) \cdot 3$$

je třeba číst následovně: nejprve vyděl c dvěma a k výsledku přičti a, takto získané číslo vynásob třemi. Bez závorek,

$$a + c/2 \cdot 3,$$

by (bez zavedení *konvencí*[9] přednosti operací) nebylo jasné, jak přesně tento výraz vyhodnotit. Tato situace v matematice se opět nijak neliší od situace mezi programovacími jazyky. Většina programovacích jazyků zavádí prioritu mezi svými operátory (viz např. C Operator Precedence).

Poznámka 3.2: Může se zdát, že to co zde popisujeme je opravdu elementární a všemi studenty dobře chápané. Bohužel množství chyb které vzniknou v písemkách kvůli „nepřesnostem“ typu

$$\ln(1 + x) = \ln 1 + x = \ln(1) + x = x$$

ukazuje, že *nejde o něco co by bylo možné v tomto textu zanedbat.* Jak se těmto problémům vyvarovat? Vždy při psaní myslete na to, jakou myšlenku vyjadřujete.

[7] Jak kapesní kalkulátor/počítač tyto hodnoty nalezne? Můžeme mu vůbec věřit? Na tuto otázku odpovíme v BI-MA2 při studiu Taylorových řad funkcí.

[8] Například v písemce.

[9] Ano, přednost násobení před sčítáním je pouze konvenční a umožňuje nám zpřehlednit řadu algebraických výrazů.

Indexy

Na závěr této podkapitoly ještě zmiňme význam horních a dolních indexů. **Horní index** se většinou používá k označení mocnin, například

$$3^5, \quad a^n, \quad e^2 \quad \text{atp.}$$

Někdy se horní index používá i k označení složek vektorů nebo třeba operace komplexního sdružení čísla a. Často se lze setkat s a^* místo $\overline{a}$. V BI-MA1 budeme používat horní index u objektů typu funkce k označení jejich derivací vyšších řádů.

Dolní index slouží k označení buď pořadí prvku v posloupnosti, složky vektoru, nebo obecněji závislosti dané veličiny na celočíselném parametru. Tento zápis má blízko k indexování prvků pole, programátorské `a[2]` má prakticky stejný význam jako naše a_2. Posloupnostmi se budeme podrobněji zabývat v BI-MA1.

3.2 Množiny a operace s nimi

Pod pojmem **množiny** rozumíme sadu objektů zadanou výčtem, nebo pomocí vlastnosti, kterou musí prvky množiny splňovat[10]. Pokud je počet prvků malý, nebo je lze jednoduše vyjmenovat, píšeme například

$$A = \{\pi, \mathrm{e}\}, \quad B = \{1, 2, 3, \ldots\}. \tag{3.4}$$

Množina A obsahuje právě dva prvky (čísla π a e). Množina B obsahuje všechna přirozená čísla (čtenáři musí být jasné, jaké prvky si má za tři tečky doplnit; jak vidno, tento způsob zápisu může skrývat jistá úskalí). Pokud x patří do množiny A, píšeme $x \in A$, v opačném případě x nepatří do množiny A a pak symbolicky píšeme $x \notin A$. V případě množiny A zavedené v (3.4) tedy platí tvrzení $\pi \in A$, ale tvrzení $1 \in A$ už není pravdivé. Naopak $1 \notin A$ je pravdivé.

Symbol $\in$ je stylizované řecké písmenko ε. V uvedeném zápisu je totiž prvek a *elementem* množiny A.

Prázdnou množinu, tj. množinu neobsahující žádné prvky, označujeme symbolem $\emptyset$. Pomocí výčtového zápisu množiny uvedeného výše můžeme psát

$$\emptyset = \{\}.$$

Prázdná množina je tedy dle definice množina, které neobsahuje žádné prvky.

Naopak ovšem množina $\{\emptyset\}$ je množina obsahující prázdnou množinu, $\emptyset \in \{\emptyset\}$, a není proto prázdná, tj. $\{\emptyset\} \neq \emptyset$. Lidé občas také zaměňují symbol pro prázdnou množinu, $\emptyset$, se symbolem pro číslo nula, 0. Tento zvyk často pramení ze zobrazení nuly v některých programovacích fontech s více méně svislým *vnitřním* proškrtnutím, aby nedošlo ke zmatení s velým písmenkem „O“. I náš font pro sazbu kódu toho využívá: `0`. V matematice tento způsob zápisu nedoporučuji používat, protože pak právě nastává kolize ve vašem značení (máte jeden symbol pro různé věci). Situace se dále může výrazně komplikovat v momentě, kdy do hry

[10] Tato naivní definice může obecně vést k logickým paradoxům, nejznámějším je asi Russelův paradox. Uvažujeme-li pouze „malé“ podmnožiny číselných množin, k žádným problémům nedojde. Problematikou definice pojmu množiny se podrobně zabývá matematická Teorie množin, například Zermelo–Fraenkelova teorie pocházející z počátku dvacátého století.

vstoupí řecké písmenko ϕ ... Je ovšem pravda, že počet prvků množiny $\emptyset$ je 0. Ale 0 není prázdná množina (je to číslo!), ani $\emptyset$ není 0, tj. $0 \neq \emptyset$.

Je-li N množina a $A(x)$ výrok o prvku x z množiny N pak množina

$$C = \{x \in N \mid A(x)\}$$

je tvořena všemi $x \in N$, pro které je výrok $A(x)$ pravdivý. Zde $A(x)$ označuje tvrzení, jehož pravdivost či nepravdivost závisí na hodnotě proměnné x. Jako příklad můžeme uvést $N = \mathbb{Z}$ a $A(x)$ nechť je tvrzení „x je sudé číslo“. Potom $A(2)$ je pravda ale $A(3)$ nikoliv. V tomto případě často mluvíme o **zadání množiny pomocí vlastnosti** (predikátu).

Například množinu všech sudých celých čísel můžeme popsat následovně

$$D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \text{ je dělitelné číslem } 2\}.$$

Pomocí výčtu bychom lehce nepřehledně[11] mohli psát $D = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$.

Množiny můžeme porovnávat podle toho, jaké obsahují prvky. O množině A řekneme, že je **podmnožinou** množiny B, právě když každý prvek množiny A patří také do množiny B. V tom případě pak píšeme $A \subset B$, nebo $B \supset A$. Vlastnost být podmnožinou představuje tzv. *uspořádání* mezi množinami. Toto uspořádání je neúplné v tom smyslu, že existují (snad si takové vymyslíte) množiny A a B pro které neplatí $A \subset B$ ani $B \subset A$.

Poznámka 3.3: Na tomto místě upozorněme na časté nedorozumění. Množinová inkluze (vlastnost být podmnožinou) zavedené výše není ostrá. Přesněji, pro každou množinu A platí $A \subset A$. Tj. z inkluze $A \subset B$ nutně neplyne, že B obsahuje nějaký prvek nepatřící do A.

Tato poznámka souvisí s poznámkou 3.1. V zásadě jsou dva přístupy ke značení ostré (nepřipouští rovnost) a neostré (připouští rovnost) inkluze:

1. $A \subset B$ značí neostrou inkluzi a $A \subsetneq B$ značí ostrou inkluzi,
2. $A \subseteq B$ značí neostrou inkluzi a $A \subset B$ značí ostrou inkluzi.

V tomto textu a většině předmětů na FITu narazíte na první konvenci s tím, že symbol pro ostrou inkluzi ani nepoužíváme (v drtivé většině případů není potřeba). Vždy je dobré si v daném textu zjistit, jaká konvence se používá.

O dvou množinách A a B říkáme, že **jsou si rovny** (nebo jsou „stejné“), právě když $A \subset B$ a současně $B \subset A$. Rovnost množin přirozeně zapisujeme jako $A = B$. Toto vyjádření rovnosti nám přímo dává návod jak případně dokazovat rovnost dvou množin, stačí ověřit obě inkluze. Pokud si dvě množiny A a B nejsou rovné, pak tento fakt přirozeně symbolicky zapisujeme jako $A \neq B$.

Množinové operace

Připomeňme základní operace s množinami. Máme-li dvě množiny A a B, podmnožiny jisté množiny X, pak jejich **průnik** definujeme jako množinu všech prvků, které patří zároveň do A i do B. Průnik dvou množin značíme symbolem $A \cap B$. Symbolicky tedy tuto množinu můžeme popsat jako

$$A \cap B := \{x \in X \mid x \in A \text{ a } x \in B\}.$$

[11] A nepřesně. Onen zápis pomocí teček není jednoznačný, hrozí nebezpečí nepochopení.

Sjednocení dvou množin A a B je tvořeno všemi prvky, které patří do A nebo[12] do B. Značíme ho symbolem $A \cup B$ a lze tedy psát

$$A \cup B := \{x \in X \mid x \in A \text{ nebo } x \in B\}.$$

Tyto dvě operace lze přirozeně zobecnit na libovolný počet množin. Nechť I je libovolná (tzv. indexová) množina a pro každé $i \in I$ je A_i jistá množina. Potom klademe

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \text{pro každé } i \in I \text{ platí } x \in A_i\},$$
$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \text{existuje } i \in I \text{ tak, že } x \in A_i\}.$$

Příklad 3.1: Mějme dvě množiny obsahující čísla a geometrické objekty $A = \{1, \triangle\}$ a $B = \{2, \triangle, \square\}$. Potom platí $A \cup B = B \cup A = \{1, 2, \triangle, \square\}$ a $A \cap B = B \cap A = \{\triangle\}$.

Příklad 3.2: Zvolme například pro každé přirozené i množiny

$$A_i = \left(1, 1 + \frac{1}{i}\right).$$

Množina A_i je tedy otevřený interval od 1 do $1 + \frac{1}{i}$. Určeme průnik a sjednocení všech těchto množin,

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset \quad \text{a} \quad \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = (1, 2).$$

Rozmyslete!

Další důležitou množinovou operací je **rozdíl**. Rozdíl dvou množin $A \setminus B$ je tvořen všemi prvky množiny A, které nepatří do B. Symbolicky zapsáno

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Pokud se bavíme o podmnožině A jisté pevně zvolené množiny X, pak množinu $A^c := X \setminus A$ stručně nazýváme **doplňkem** množiny A. Musí být ale předem jasné, jak je zvoleno X!

Otázka 3.1: Pro množiny $A = (1, 3)$ a $B = \langle 2, 4)$ určete rozdíly $A \setminus B$ a $B \setminus A$.

Mezi sjednocením, průnikem a doplňkem platí důležité vztahy zformulované v následujícím tvrzení.

Věta 3.1 (de Morgan)**:** Mějme $A, B \subset X$. Potom platí

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c,$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Důkaz. Dokážeme první vztah, druhý se dokáže naprosto analogicky.

Máme dokázat rovnost dvou množiny, konkrétně $(A \cap B)^c$ a $A^c \cup B^c$. V tomto případě můžeme postupovat přímo sérií ekvivalencí: prvek $x \in X$ patří do $(A \cap B)^c$ právě když (dle definice doplňku) x nepatří do $A \cap B$, tedy právě když (definice průniku) x nepatří do A nebo nepatří do B. To je ovšem ekvivalentní s tím, že x patří do A^c nebo do B^c, tj. $x \in A^c \cup B^c$. $\square$

[12] Toto „nebo“ není exkluzivní, jde o obyčejnou disjunkci.

Všimněte si, že zatímco pro libovolné dvě množiny A a B platí

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{a} \quad A \cap B = B \cap A,$$

pro rozdíl dvou množin tato vlastnost (komutativita) neplatí. Tedy obecně je množina $A \setminus B$ různá od množiny $B \setminus A$.

Další základní operací na množinách je **kartézský součin** množin[13]. Pro libovolné dvě množiny A a B je jejich kartézský součin, označujeme ho $A \times B$, tvořen všemi **uspořádanými dvojicemi**[14] prvků z A a B, tj. dvojicemi (a, b) kde $a \in A$ a $b \in B$. O a (resp. b) mluvíme jako o první (resp. druhé) složce uspořádané dvojice (a, b). Přesněji

$$A \times B := \big\{(a, b) \,\big|\, a \in A \text{ a } b \in B\big\}.$$

Kartézský součin lze zavést i pro více množin. Například pod $A \times B \times C$ rozumíme množinu všech uspořádaných trojic prvků z A, B a C, atd.

Příklad 3.3: Uvažme dvě množiny $A = \{1, 2\}$ a $B = \{\triangle, \Box, \nabla\}$. Potom množina $A \times B$ má $2 \cdot 3 = 6$ prvků a platí

$$A \times B = \big\{(1, \triangle), (1, \Box), (1, \nabla), (2, \triangle), (2, \Box), (2, \nabla)\big\}.$$

Podobně $B \times A$ má $3 \cdot 2 = 6$ prvků a platí

$$B \times A = \big\{(\triangle, 1), (\triangle, 2), (\Box, 1), (\Box, 2), (\nabla, 1), (\nabla, 2)\big\}.$$

Očividně $A \times B \neq B \times A$. Tyto množiny obsahují zcela jiné prvky.

Příklad 3.4: *Notoricky* známým kartézským součinem je množina $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, kterou zkráceně označujeme $\mathbb{R}^2$ a představujeme si ji jako idealizaci roviny. Využíváme ji například při vizualizaci funkcí pomocí grafů.

Otázka 3.2: Pokud má množina A m prvků a množina B n prvků, kolik prvků mají množiny $A \times B$ a $B \times A$?

3.3 Číselné množiny

V této části textu zúžíme naši pozornost na množiny tvořené čísly. Na tyto množiny narazíme ve většině matematických předmětů.

Přirozená čísla

Množinu **přirozených čísel**[15] označujeme symbolem $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

[13] René Descartes, francouzský filozof a matematik, 1596–1650, v latině Renatus Cartesius.

[14] Je nutné rozlišovat mezi uspořádanou dvojicí (a, b) a množinou $\{a, b\}$. Množiny $\{a, b\}$ a $\{b, a\}$ jsou stejné, ale uspořádané dvojice (a, b) a (b, a) obecně ne (pro různé a a b). Uspořádaná dvojice na rozdíl od množiny ještě nese informaci o pořadí svých prvků.

[15] Množinu přirozených čísel s nulou značíme $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

(a) (b) (c)

Obrázek 3.2: Skupiny symbolů (a), (b) a (c) mají jistou společnou vlastnost, každá z uvedených skupin obsahuje 3 symboly.

Přirozená čísla abstrahují „počet“ objektů. Na obrázku č. 3.2 jsou uvedeny tři sady různých geometrických útvarů. Příklady (a), (b) i (c) mají tu vlastnost, že vždy obsahují tři útvary. Tento postřeh vyjadřujeme konstatováním, že útvary jsou tři a značíme arabskou číslicí 3.

Všimněme si, že množina přirozených čísel je **uzavřená vůči násobení a sčítání**. Přesněji, násobením a sčítáním dvou přirozených čísel dostaneme opět přirozené číslo:

$$\text{pokud } a, b \in \mathbb{N} \text{ potom } a + b \in \mathbb{N},$$
$$\text{pokud } a, b \in \mathbb{N} \text{ potom } a \cdot b \in \mathbb{N}.$$

Při počítání si ale pouze se sčítáním a násobením nevystačíme. Potřebujeme umět i odčítat a dělit, což v množině přirozených čísel už nelze vždy úspěšně provést (někdy ano, např. $4 - 2 = 2$ a $4/2 = 2$, ale $2 - 4$ nebo $2/4$ je v přirozených číslech problém). Řešení těchto algebraických úloh nás přirozeně přivede k celým a racionálním číslům.

Na závěr této podkapitoly učiňme ještě jednu poznámku. Více méně bez komentáře rovnou využíváme poziční zápis přirozených čísel pomocí arabských[16] cifer. V desítkové bázi lze každé přirozené číslo $m \in \mathbb{N}_0$ jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$m = \sum_{j=0}^{n} m_j 10^j = m_n \cdot 10^n + m_{n-1} \cdot 10^{n-1} + m_2 \cdot 100 + m_1 \cdot 10 + m_0,$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $m_0, m_1, \ldots, m_n$ jsou prvky množiny $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Tento fakt bychom zapisovali také symbolicky následujícím způsobem

$$m = (m_n m_{n-1} \cdots m_2 m_1 m_0)_{10}.$$

Na pravé straně této rovnosti pak *pozice* jednotlivých cifer udávají jejich význam. Proto mluvíme o pozičním zápisu.

Zkuste se ale zamyslet nad problémem provádění algebraických operací (sčítání, násobení, odčítání) např. pomocí římského číselného systému. Například uvažte

$$\text{MMXXIII} - \text{CDXCIX}$$

a *zapomeňte*, že znáte poziční zápis a v něm dostupné algoritmy. Není to nic jednoduchého, že? Člověk pak raději sáhne po počítadle (abakus).

Arabské číslice v Evropě propagoval Leonardo z Pisy (známý pod jménem Fibonacci) na začátku třináctého století. V roce 1202 vydal spis *Liber abbaci* („Kniha o počítání“), který významně napomohl rozvoji obchodu a vědy. Další zajímavosti o této „první výpočetní revoluci“ se může zvídavý čtenář dozvědět v poutavé knížce [4].

[16] Ve skutečnosti pocházejí z Indie a do Evropy byly dovezeny arabskými obchodníky, odtud v Evropě používané označení. Zdůrazněme, že zde je o dva důležité faktory: označení cifer *a* poziční zápis.

Celá čísla

Množina $\mathbb{N}$ však není uzavřená vůči odečítání dvou přirozených čísel. V případě sčítání můžeme tento fakt také formulovat tak, že rovnice

$$a = b + x \tag{3.5}$$

pro zadaná přirozená $a, b \in \mathbb{N}$ nemusí mít přirozené řešení x. Uvažme třeba $a = 4$ a $b = 5$. Jinak řečeno, pouze pomocí přirozených čísel nemůžeme vyjádřit koncept „dluhu" (záporné číslo) a „prázdného počtu" (nula).

K odstranění těchto nedostatků musíme k přirozeným číslům přidat nulu a záporná čísla. Dostáváme tak množinu **celých čísel**,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

V této množině už můžeme násobit, sčítat i odčítat, ale výsledek operace dělení už tuto množinu opustí. Tedy řešení rovnice

$$a = b \cdot x \tag{3.6}$$

pro zadaná celočíselná a a b nemusí být celočíselné. Tuto operaci opět můžeme motivovat potřebou rozdělovat jeden objekt na několik částí. Například při dělení jedné pizzy ($a = 1$) na osm kousků ($b = 8$) dostáváme osminy pizzy ($x = \frac{1}{8}$). Musíme přejít k racionálním[17] číslům.

Racionální čísla

Množina **racionálních čísel** je tvořena řešeními rovnice (3.6) s nenulovým b, která zapisujeme jako zlomky[18]

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ nesoudělná} \right\}. \tag{3.7}$$

Operace sčítání a násobení je na zlomcích definována pomocí operací v $\mathbb{Z}$ následovně[19]

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} := \frac{ps + qr}{qs}, \quad \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} := \frac{pr}{qs}, \quad \text{kde} \quad \frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}.$$

Na pravých stranách těchto výrazů vždy můžeme zkrátit společné faktory a skutečně tak dostáváme prvek množiny (3.7). Celá čísla přirozeně patří do množiny racionálních čísel, tj. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, jakožto zlomky $\frac{p}{1}$, kde $p \in \mathbb{Z}$, přičemž algebraické operace jsou zachovány.

Racionální čísla $\mathbb{Q}$ spolu s operacemi sčítání $+$ a násobení $\cdot$ splňují veledůležité vztahy

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \tag{3.8}$$

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \tag{3.9}$$

[17] *Ratio* – podíl.

[18] Dvě celá čísla jsou nesoudělná, právě když jejich největší společný dělitel je roven 1.

[19] Definice operace sčítání může na první pohled vypadat nepochopitelně. Motivace je však jednoduchá. Představte si, že chceme vyjádřit, jaký zlomek pizzy představují $\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{4}$ pizzy. Abychom toho dosáhli, musíme si nejprve rozmyslet, jak tato množství vyjádřit „porovnatelným" způsobem. Třetiny i čtvrtiny lze beze zbytku rozdělit na dvanáctiny. Máme tedy $\frac{8}{12}$ a $\frac{3}{12}$ pizzy, dohromady $\frac{8+3}{12} = \frac{11}{12}$ pizzy. Operace sčítání zlomků je jen zobecněním tohoto postřehu na všechny zlomky. Tento postup jistě znáte pod slovním spojením „převod na společný jmenovatel."

platné pro libovolná racionální čísla a, b, c. Rovnosti (3.8) se nazývají **asociativní zákony** pro sčítání, resp. násobení. Pouze díky jejich platnosti můžeme u opakovaného sčítání a násobení přestat psát závorky. Celkový výsledek totiž na uzávorkování nezáleží[20]. Rovnost (3.9) se nazývá **distributivní zákon**. Čtenář je s ním jistě intimně obeznámen, neboť díky němu lze provádět operaci „vytýkání před závorku“. Abychom nemuseli na pravé straně (3.9) psát závorky, zavádí se konvenční přednost operace násobení před sčítáním. Význačným prvkem množiny racionálních čísel je číslo 0, které splňuje

$$0 + a = a + 0 = a$$

pro libovolné racionální číslo a. Ke každému racionálnímu číslu a existuje racionální číslo označované jako $-a$ splňující

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Podobný význam jako číslo 0 pro operaci sčítání má číslo 1 pro operaci násobení, pro každé racionální číslo a platí

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

Konečně ke každému nenulovému racionálnímu číslu a existuje racionální číslo označované jako a^{-1} splňující

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Předchozí odstavec lze shrnout do krátkého konstatování, že množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ spolu s operacemi sčítání $+$ a násobení $\cdot$ tvoří **číselné těleso**. Studiem číselných těles se zabývá[21] oblast matematiky nazývaná obecná algebra. Konečná[22] tělesa nacházejí široké uplatnění v moderních šifrovacích algoritmech a počítačové bezpečnosti vůbec. Při svém studiu na FITu se s nimi proto hned v několika předmětech později setkáte.

V množině racionálních čísel lze tedy provádět tzv. algebraické operace sčítání, odčítání, násobení a dělení (nenulovými čísly). Toto „číselné prostředí“ plně dostačuje k provádění jednoduchých účetních a obchodních operací, které motivovaly vznik algebry ve středověku. Bohužel (nebo možná naštěstí) tato číselná množina je nedostatečná k popisu celé řady praktických problémů. Na druhou stranu, ani takto starý koncept jako jsou racionální čísla, nelze plně modelovat na moderních počítačích (nemáme k dispozici nekonečnou paměť – čitatelé a jmenovatelé mohou být v principu libovolně velká celá čísla). Při provádění algebraických operací *v racionálních číslech* ovšem nedochází k zaokrouhlovacím chybám.

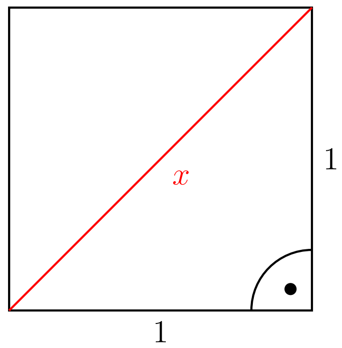
Reálná čísla

Na začátku této kapitoly jsme si ukázali, že přirozených a celých čísel „není dost“. K uspokojení našich požadavků bylo vždy nutné další čísla přidat. Podobná situace nastává i v případě racionálních čísel. Tato množina je sice již uzavřená vůči binárním algebraickým operacím sčítání a násobení, ale tentokrát narazíme na potíže při analýze následujícího geometrického problému. Uvažujme čtverec o straně délky 1 (racionální číslo), viz obrázek č. 3.3.

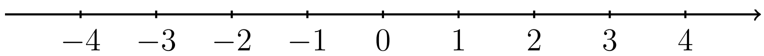
[20] Např. $(4 + 2) + 1 = 4 + (2 + 1) = 4 + 2 + 1 = 7$. Uvědomme si, že toto není automaticky splněno pro libovolnou binární operaci. Uvážíme-li např. operaci dělení $\div$, $a \div b := \frac{a}{b}$, pak $\frac{1}{4} = (2 \div 4) \div 2 \neq 2 \div (4 \div 2) = 1$. Asociativita je mezi binárními operacemi spíše výjimečnou vlastností.

[21] Mimo jiné.

[22] Mající konečný počet prvků.



Obrázek 3.3: Čtverec o straně délky 1 a jeho úhlopříčka o straně délky x.



Obrázek 3.4: Reálná číselná osa.

Ptáme se, jaká je délka jeho úhlopříčky. Tu lze nalézt snadno pomocí pravítka. Na obrázku č. 3.3 je tato úhlopříčka označena písmenem x. Podle Pythagorovy věty platí

$$1^2 + 1^2 = x^2. \tag{3.10}$$

Tedy $x^2 = 2$. Takovéto kladné číslo x nazýváme odmocninou ze dvou a značíme $\sqrt{2}$. Lze snadno ukázat, že toto číslo *není* racionální, jak jsme si již ukázali ve větě 2.1. Stojíme tedy před závažným problémem. Na obrázku č. 3.3 nelze délku červené úsečky vyjádřit[23] racionálním číslem! Znamená to, že s konceptem úhlopříčky v tomto případě nemůžeme pracovat? Ne, vždyť jsme ji před chvilkou nakreslili! Jen to ukazuje na nedokonalost racionálních čísel, musíme přistoupit k reálným číslům, které nám umožní numericky (číselně) popsat i takovéto *reálné* geometrické útvary.

Mezi další významná iracionální čísla patří například Ludolfovo[24] číslo (tradičně označované řeckým písmenkem π) či Eulerova[25] konstanta (tradičně označované latinským písmenem e). V jistém smyslu je iracionálních čísel podstatně více[26] než racionálních, lze říci, že „typické“ reálné číslo je iracionální. Více si o vztahu těchto dvou množin povíme v BI-MA1. Čtenáři je jistě známo, že reálná čísla si můžeme geometricky představovat jako body ležící na přímce, tzv. **číselné ose**. Na přímce je zvolen význačný bod odpovídající nule a číslo a vynášíme na osu ve vzdálenosti $|a|$ od bodu 0. Kladná čísla umisťujeme napravo a záporná čísla nalevo od 0.

Pokud bychom na osu vynášeli pouze racionální čísla, výsledná přímka by byla „děravá“. Například ve vzdálenosti $\sqrt{2}$ (napravo i nalevo) od bodu 0 by nebyl zanesen žádný bod. K zaplnění číselné osy je potřeba uvažovat i iracionální čísla. Požadavek na neděravost reálné osy přesněji vyjadřuje „axiom úplnosti“. Podrobněji se touto problematikou budeme zabývat v jedné z prvních přednášek BI-MA1.

Poznamenejme pro zajímavost, že rozhodnout o racionálnosti či iracionálnosti čísla nemusí být jednoduché. Dokonce existují čísla, o kterých se doposud *neví*, do které množiny patří.

[23] Či popsat, modelovat pomocí.

[24] Ludolph van Ceulen, 1540 – 1610, matematik nizozemského původu, zasvětil svůj život výpočtu čísla π na 35 desetinných míst, která jsou i vyryta na jeho náhrobku.

[25] Leonhard Euler, 1707 – 1783, švýcarský matematik a fyzik.

[26] Zdůrazněme tuto myšlenku. Čtenář může mít pocit, že k racionálním číslům přidáváme jen pár dalších iracionálních čísel. Opak je ale pravdou!

Příkladem může být **Euler–Mascheroniho** konstanta definovaná vztahem[27]

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) \approx 0.577\,215\,665.$$

Více informací o tomto konkrétním problému lze nalézt v [8].

Poznámka 3.4 (Strojová čísla)**:** Reálná čísla v plné obecnosti zdaleka nejde reprezentovat v počítači. Místo reálných čísel se používají tzv. **čísla s plovoucí desetinnou čárkou**, či **strojová čísla** (*floating point numbers*, familiárně *floaty*). Podle toho kolik bitů použijeme k jejich reprezentaci (v dnešní době typicky 64 bitů), takovou získáme maximální „přesnost“ (pozor, tento pojem je záludně vágní). Na tomto místě nebudeme příliš zabíhat do detailů, strojová čísla a práci s nimi přesně popisuje IEEE standard 754 [6]. Alespoň uveďme několik zásadních poznámek týkajících se strojových čísel:

- každé strojové číslo má v binární soustavě konečný počet cifer,
- množina strojových čísel je konečná a nerovnoměrně rozprostřená (nejvíce jich je u 0),
- množina strojových čísel je ve skutečnosti podmnožina množiny racionálních čísel.
- při provádění operací se strojovými čísly dochází k zaokrouhlovacím chybám v jejichž důsledku například neplatí asociativní zákony.

Pro zajímavost, v 64 bitové přesnosti platí: nejmenší kladné strojové číslo je $5 \cdot 10^{-324}$, největší kladné strojové číslo je $1.797\,693\,134\,862\,315\,7 \cdot 10^{308}$. Při počítání se strojovými čísly je potřeba být opatrný, naivní implementace některých algoritmů popsaných matematicky pomocí reálných čísel mohou mít doslova katastrofální následky.

Komplexní čísla

Mohlo by se zdát, že po doplnění racionálních čísel iracionálními čísly již není nutné žádná další čísla přidávat. Všimněme si, že geometrickou úvahu z minulého odstavce lze prostě redukovat na požadavek (viz rovnici (3.10)), aby rovnice

$$x^2 - 2 = 0$$

měla v dané číselné množině řešení (zde $\pm\sqrt{2} \in \mathbb{R}$). Ovšem už hned jednoduchá obměna této rovnice,

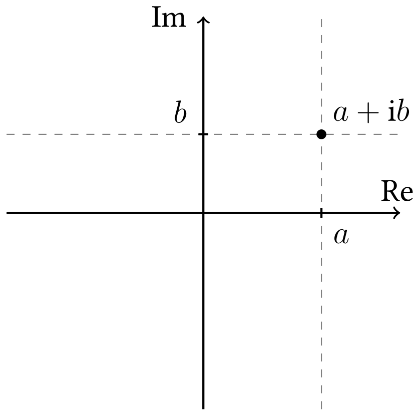
$$x^2 + 1 = 0, \tag{3.11}$$

nemá reálné řešení[28]. Tuto rovnici lze vyřešit zavedením imaginární jednotky (značíme i), jež splňuje rovnost $\mathrm{i}^2 = -1$ a řeší proto i rovnici (3.11). Číslo i nazýváme **imaginární jednotkou**. Toto nové číslo můžeme násobit a sčítat s libovolným reálným číslem. Získáváme tak **komplexní čísla**,

$$\mathbb{C} = \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

[27] O limitě se dozvíte podrobněji v BI-MA1.

[28] To by mělo být zřejmé. Pro libovolné reálné číslo x je jeho kvadrát x^2 nezáporný a proto je výraz $x^2 + 1$ vždy větší nebo roven jedné a nikdy nemůže být nulový.



Obrázek 3.5: Komplexní rovina.

Je-li $z = a + b\mathrm{i}$ komplexní číslo, pak reálné číslo a nazýváme **reálnou částí** z a reálné číslo b **imaginární částí** z. Dvě komplexní čísla se rovnají, právě když se rovnají jejich reálné a imaginární části. Reálnou část komplexního čísla z značíme $\operatorname{Re} z$ a imaginární část značíme $\operatorname{Im} z$. Reálná čísla jsou v množině komplexních čísel přirozeně obsažena ztotožníme-li reálné číslo a s komplexním číslem $a + 0\mathrm{i}$.

Algebraické operace na množině $\mathbb{C}$ jsou zavedeny následovně

$$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) := (a + c) + (b + d)\mathrm{i},$$

$$(a + b\mathrm{i}) \cdot (c + d\mathrm{i}) := (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}, \quad a + b\mathrm{i},\ c + d\mathrm{i} \in \mathbb{C}. \tag{3.12}$$

Všimněte si, že pokud $d = b = 0$ pak součet $a + c$ a součin $a \cdot c$ má stejný význam jako v reálných číslech. Množina $\mathbb{C}$ s takto zavedenými operacemi opět tvoří těleso.

Komplexní čísla si lze představit například jako body v **komplexní rovině**. Vodorovnou osu nazýváme **reálnou osou** a svislou osu nazýváme **imaginární osou**. Komplexnímu číslu $a + \mathrm{i}b$ pak odpovídá bod o souřadnicích (a, b). Viz obrázek č. 3.5.

Zavádí se **absolutní hodnota komplexního čísla**

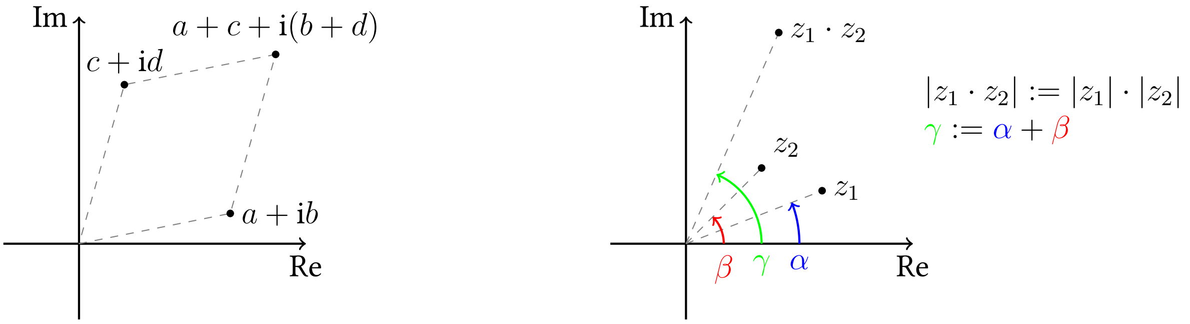
$$|a + \mathrm{i}b| := \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

V komplexní rovině si lze absolutní hodnotu komplexního čísla $a + \mathrm{i}b$ představit jako délku úsečky spojující body 0 a $a + b\mathrm{i}$. Číslo $a - \mathrm{i}b$ nazýváme **komplexně sdruženým číslem** k číslu $a + \mathrm{i}b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Komplexně sdružené číslo tak získáme zrcadlením vůči reálné ose.

Operaci sčítání komplexních čísel si lze představit jako sčítání vektorů (sčítá se „po složkách“). Operaci násobení komplexních čísel lze v komplexní rovině znázornit jako rotaci a škálování. To není zcela zřejmé tvrzení, lze ho však odvodit například z definice operace násobení (3.12). Pro ilustraci uvádíme obrázek 3.6. Speciálně násobení imaginární jednotkou i si lze v komplexní rovině představovat jako rotaci o úhel $\frac{\pi}{2}$ vzhledem k počátku souřadného systému, který odpovídá číslu 0, proti směru hodinových ručiček.

Důvod k zavedení komplexních čísel se může zdát uměle vykonstruovaný. Například se hned nabízí otázka, zda v případě, kdy budeme zkoumat řešení jiné polynomiální rovnice než (3.11), nebudeme potřebovat další komplexní jednotku. Odpověď na tuto otázku podal Gauss[29] ve své slavné *Fundamentální větě algebry*: každý polynom s komplexními koeficienty

[29] Johann Carl Friedrich Gauss (30. dubna 1777 – 23. února 1855) byl německý matematik.



Obrázek 3.6: Geometrická interpretace operace sčítání a násobení komplexních čísel.

stupně n má n komplexních kořenů[30]. K řešení polynomiálních rovnic tedy naprosto vystačíme s komplexními čísly.

Řada matematických metod aplikovaných v praxi je ve své podstatě komplexní. Například Fourierova transformace (resp. *Fast Fourier Transform*, FFT), využívaná k analýze a zpracování signálu (a tedy i ve vašem oblíbeném audio či video přehrávači), je bez aparátu komplexních čísel jen nešikovně popsatelná. Z důvodů, které na tomto místě nelze rozebírat, komplexní čísla vždy přirozeně vyvstanou kdykoliv máme co dočinění s rotacemi (viz interpretace násobení komplexních čísel), reálná čísla samotná vystačí pouze na škálování. Bez komplexních čísel by šlo jen velmi těžko formulovat kvantovou fyziku, teorii, na které stojí řada moderních technologií a jež možná v blízké budoucnosti kompletně změní otázku bezpečnosti IT.

Kvaterniony

Na závěr této kapitolky poznamenejme, že komplexní čísla lze ještě dále rozšířit na (nekomutativní) **těleso kvaternionů**. V něm nemáme jen jednu komplexní jednotku, ale hned tři (i, j a k). Celkem tedy dostáváme čtyři jednotky (jedna reálná 1 a tři „imaginární“), odtud název. Vztahy mezi těmito jednotkami jsou definovány pomocí rovnic

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1 \quad \text{a} \quad \mathrm{ijk} = -1. \tag{3.13}$$

Z těchto vztahů dokážete odvodit další součiny různých kombinací jednotek.

Otázka 3.3: Z definičních vztahů (3.13) odvoďte hodnotu součinů

$$\mathrm{ij} \quad \text{a} \quad \mathrm{ji}.$$

Množinu

$$\mathbb{H} = \{a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

s operacemi definovanými podobně jako v komplexních číslech, zavedl Hamilton. (Sir William Rowan Hamilton (4. srpna 1805 – 2. září 1865) byl irský fyzik a matematik. Poté, co objevil definiční vztahy (3.13), vyryl je do mostu v Dublinu.) Proč se tu o kvaternionech zmiňujeme? Pomocí kvaternionů lze totiž velmi výhodně (ve výpočetním slova smyslu) počítat například rotace vektorů v třírozměrném prostoru. Využívá jich řada algoritmů implementovaných v grafických kartách. Pro zajímavost viz např. [3].

[30] Kořeny počítáme dle jejich násobnosti (tj. např. polynom $x^2 - 4$ má dva kořeny -2 a 2 a polynom $(x-2)^2$ má dva kořeny 2 a 2).

Otázka 3.4: Zakreslete následující komplexní čísla do komplexní roviny.

$$\text{a) } z = (4+3\mathrm{i})(1-2\mathrm{i}), \quad \text{b) } z = (2-\mathrm{i})^2,$$
$$\text{c) } z = \mathrm{i}(1+\mathrm{i}), \quad \text{d) } z = \frac{1}{2+\mathrm{i}}.$$

3.4 Význačné podmnožiny množiny reálných čísel

V této kapitole připomeneme definici intervalů a uvedeme několik pojmů popisujících vlastnosti podmnožin reálných čísel.

Intervaly představují důležité podmnožiny množiny reálných čísel. Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, zavádíme značení:

$$
\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \text{otevřený interval,}\\
\langle a,b\rangle &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} && \text{uzavřený interval,}\\
\langle a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} && \text{polouzavřený interval,}\\
(a,b\rangle &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} && \text{polouzavřený interval,}\\
(a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} && \text{neomezený interval.}
\end{aligned}
$$

Podobně zavádíme neomezené intervaly $\langle a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ a $(-\infty, a\rangle$.

Dále pro podmnožiny reálné osy zavádíme následující, skoro až očividné, názvosloví.

Definice 3.1 (Omezenost množiny)**:** Množinu $A \subset \mathbb{R}$ nazýváme **omezenou shora** (resp. **zdola**), právě když existuje konstanta $K \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $x \in A$ platí $x < K$ (resp. $x > K$). Množinu $A \subset \mathbb{R}$ nazýváme **omezenou**, právě když je omezená shora i zdola zároveň.

Příklad 3.5:

- Například libovolný uzavřený interval $\langle a, b\rangle$ je podle definice omezený shora i zdola. Skutečně pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ jistě platí třeba $a - 1 < x$ a $x < b + 1$.
- Množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ je omezená zdola (například lze volit konstantu $K = -\pi$), ale není omezená shora (pro každé číslo K existuje přirozené číslo větší než K, například $\lceil K \rceil + 1$).
- Množina celých čísel $\mathbb{Z}$ není omezená shora ani zdola

Často potřebujeme porovnávat prvky množiny podle jejich velikosti. Důležitou roli pak hrají největší a nejmenší prvky, tzv. maxima a minima množiny. Přesná definice je následující.

Definice 3.2 (Maximum a minimum množiny)**:** Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Číslo $a \in A$ nazýváme **maximem množiny** A, právě když pro každé $x \in A$ platí nerovnost $x \leq a$. Číslo $b \in A$ nazýváme **minimem množiny** A, právě když pro každé $x \in A$ platí nerovnost $x \geq b$. Jinak řečeno, maximum (resp. minimum) množiny A reálných čísel je její prvek, který je větší (resp. menší) nebo roven než všechny ostatní prvky této množiny. Maximum (resp. minimum) množiny A také značíme max A (resp. min A).

Takto definované maximum (případně minimum) množiny nemusí vždy existovat. Například interval $(1, 2)$ nemá ani minimum, ani maximum. Čísla 1 ani 2 skutečně nepatří do množiny $(1, 2)$. S tímto faktem se občas studenti odmítají smířit, ale je tomu skutečně tak. Kdyby existovalo maximum množiny $(1, 2)$, označme si ho a, pak by toto a nutně muselo splňovat $a < 2$ (jinak by do uvedeného intervalu nepatřilo, viz definici intervalu). Pak ale číslo

$$\frac{a+2}{2} = a + \underbrace{\frac{2-a}{2}}_{>0}$$

je ostře větší než a a stále menší než 2. Patří proto do intervalu $(1,2)$ a a nemůže být maximem množiny $(1,2)$ (teď jsme udělali důkaz!).

Tento problém lze odstranit zavedením *infima* a *suprema* množiny, která představují zobecnění pojmů minimum a maximum. Podrobněji se jim budeme věnovat v přednáškách Matematické analýzy.

Otázka 3.5: Která z následujících množin je shora omezená, zdola omezená či omezená?

1. $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$,
2. množina všech prvočísel,
3. množina všech řešení nerovnice $x^2 - (\pi+1)x + \pi > 0$,
4. $\{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Otázka 3.6: Určete maxima a minima následujících množin, pokud existují.

1. $A = \{2, -1, 3\}$,
2. $B = (4, a\rangle$, kde $a > 4$ je pevně zvolený parametr,
3. $C = \{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,
4. $D = \{2k - 3 \mid k \in \mathbb{N}\}$,
5. $E = \{2k - 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Otázka 3.7: Má prázdná množina maximum a minimum?

3.5 Výroky a logické spojky

Matematická tvrzení je výhodné zapisovat ve zkrácené formě pomocí symboliky predikátové logiky. Podrobněji bude tato oblast matematiky probrána v předmětu *Diskrétní matematika a logika* (BI-DML)[31]. Díky využití tohoto přístupu vynikne logická struktura tvrzení, která by jinak mohla čtenáři zůstat skryta za větami přirozeného (v našem případě českého) jazyka. Na tomto místě pouze stručně shrneme základy, které jsou čtenáři již jistě známy.

Poznámka 3.5: Ihned učiňme jednu motivační a vysvětlující poznámku. Řada studentů má k formálním zápisům jistý odpor. Ten je nutné překonat. Uvědomte si, že přesná formulace matematických tvrzení pouze přirozeným českým jazykem je velice „křehká“ a náchylná na dezinterpretaci. Obranou proti tomu je velmi podrobný slovní popis, čímž ovšem text ztrácí na čitelnosti. Tento přístup se používal ve středověku, od té doby jsme se již posunuli. Formální zápis odstraňuje neurčitost, řada problémů tím následně odpadá.

[31] A případně ještě podrobněji v oborovém předmětu BI-LOG.

Je také vhodné si uvědomit, že libovolný programovací jazyk je ve své podstatě vysoce formalizovaný zápis jistých instrukcí. Budoucím programátorům by formálně přesné vyjadřování mělo být blízké. Překladač vás vytrestá za sebemenší chybičku, matematika je v tomto směru přeci jen malinko shovívavější!

Výrok je tvrzení, o kterém lze v principu jednoznačně rozhodnout, zda je či není pravdivé. Výroky značíme velkými písmeny $A,\ B,\ C, \dots$ Často narazíme na výroky závisející na parametru x, tzv. predikáty, které značíme dle očekávání $A(x)$. Pro různá x tak dostáváme různé výroky $A(x)$. Uveďme alespoň dva příklady.

- Nechť x probíhá množinu všech obyvatel planety Země. Symbolem $A(x)$ označme výrok „x je muž“. Označuje-li a autora tohoto textu, pak je výrok $A(a)$ pravdivý.
- Nechť x probíhá množinu všech celých čísel. Symbolem $B(x)$ označme výrok „x je sudé číslo“. Pravdivými výroky pak jsou například $B(2)$, či $B(4)$, ale $B(99)$ pravdivý není.

Připomeňme čtyři základní **výrokové spojky** (operace), pomocí nichž z daných výroků sestavujeme složitější. K dispozici máme:

- $\neg A$, **negace**, A není pravdivé,
- $A \wedge B$, **konjunkce**, platí A a zároveň B,
- $A \vee B$, **disjunkce**, platí A nebo[32] B,
- $A \Rightarrow B$, **implikace**, A implikuje B, případně z A plyne B,
- $A \Leftrightarrow B$, **ekvivalence**, A je ekvivalentní s B, případně A platí právě tehdy když B.

V závislosti na pravdivostním ohodnocení prvotních výroků A a B jsou pravdivostní hodnoty výroků $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$ a $A \Leftrightarrow B$ dány následující tabulkou (symbol 1 standardně označuje pravdivost a 0 nepravdivost).

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Abychom mohli kvantifikovat proměnné vyskytující se ve výrokových formulích, zavádíme tři **kvantifikátory**:

- $\forall$, **obecný kvantifikátor**, pro všechna, pro každé,
- $\exists$, **existenční kvantifikátor**, existuje, pro nějaké,
- $\exists!$, $\exists_1$, existuje právě jedno.

[32] Toto „nebo“ není exkluzivní, tj. jsou-li A i B oba pravdivé výroky, pak je pravdivý i výrok $A \vee B$.

Pokud proměnná x probíhá všechna reálná čísla, píšeme $\forall x \in \mathbb{R}$. Podobně pokud chceme vyjádřit existenci celého čísla k, píšeme $\exists k \in \mathbb{Z}$. Pro větší přehlednost kvantifikátory v zápisu formule oddělujeme závorkami. Předveďme si názornou ukázku.

Příklad 3.6: Přirozené číslo p je prvočíslo, právě když každé přirozené k dělící p je rovno 1 nebo p. Zapsáno pomocí kvantifikátorů a výrokových spojek odpovídá tomuto tvrzení formule

$$(\forall k \in \mathbb{N})\big(k|p \Rightarrow (k = 1 \vee k = p)\big),$$

zde používáme označení $k|p$ pro predikát „k dělí p".

Příklad 3.7: Podmínku v definici omezenosti množiny $A \subset \mathbb{R}$ shora bychom mohli ekvivalentně vyjádřit následující formulí

$$(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(x < K)$$

Příklad 3.8: Známá **Goldbachova hypotéza** patří mezi jednoduchá matematická tvrzení, která jsou numericky ozkoušena pro milióny případů, ale důkaz jejich případné pravdivosti doposud není znám. Tato hypotéza tvrdí, že každé sudé přirozené číslo větší než 2 lze vyjádřit jako součet dvou prvočísel, například

$$4 = 2 + 2, \quad 6 = 3 + 3, \quad 8 = 3 + 5, \quad 10 = 3 + 7, \ldots$$

Označíme P množinu všech prvočísel a $2\mathbb{N}$ množinu všech sudých přirozených čísel, pak Goldbachovu hypotézu lze vyjádřit formulí

$$(\forall n \in 2\mathbb{N} \smallsetminus \{2\})(\exists k, l \in P)(n = k + l).$$

Nutná a postačující podmínka

Na závěr této podkapitoly ozřejmíme ještě jeden obrat často používaný (nejen) v matematické literatuře, a sice vysvětlíme význam „nutné", „postačující" a „nutné a postačující" podmínky. Platí-li tvrzení $A \Rightarrow B$, pak o A mluvíme jako o **postačující podmínce pro** B a o B mluvíme jako o **nutné podmínce pro** A.

Důvod k tomuto názvosloví by měl být očividný. Platí-li tvrzení $A \Rightarrow B$ a víme-li, že A je pravdivé, pak platí i B! Platnost A tedy *stačí* pro to, aby platilo B. Naopak, pokud je tvrzení $A \Rightarrow B$ pravdivé a víme, že B je nepravdivé, potom A je nepravdivé. Tj. aby vůbec A mohlo být pravdivé, tak B musí být *nutně* pravdivé. Konečně, je-li jisté tvrzení **nutnou a postačující podmínkou** pro A, pak je ekvivalentní A.

Příklad 3.9: Nutnou podmínkou pro přijetí studenta na FIT ČVUT je podání přihlášky na FIT ČVUT. Podání přihlášky na FIT ČVUT ale není postačující podmínkou pro přijetí na FIT ČVUT.

Otázka 3.8: Je sudost přirozeného čísla postačující pro jeho neprvočíselnost?

3.6 Zkrácené psaní součtů a součinů

Látka v této kapitole je pravděpodobně pro čtenáře nová. Není však náročná, v podstatě jde o záležitost notace, s kterou je dobré se co nejdříve seznámit.

Velmi často narazíme na potřebu sčítat jistý konečný počet čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, případně na potřebu diskutovat vlastnosti tohoto součtu. Místo zdlouhavého a potenciálně nejednoznačného[33] výrazu

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{3.14}$$

píšeme

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Symbol $\sum$, tedy velké písmeno sigma, pochází z řecké abecedy, kde označuje velké „s“. Je zvoleno, protože označuje součet (v češtině jde o náhodu, anglicky *sum*, latinsky *summa*). „Lokální proměnná“ k se nazývá **sčítací index**, číslo 1 se označuje jako **dolní mez** a číslo n jako **horní mez**. Je pouze na naší volbě, jak sčítací index označíme. Například součty

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j$$

jsou si rovné, neboť označují stejný součet (3.14), který samozřejmě na žádném sčítacím indexu nezávisí (nevyskytuje se v něm ani k, ani j). Všimněte si ovšem, že sčítací index je vždy stejný pod symbolem sumy i ve sčítanci, naproti tomu platí

$$\sum_{k=1}^{n} a_j = \underbrace{a_j + a_j + \cdots + a_j}_{n\times} = n \cdot a_j,$$

což je zcela něco jiného.

Díky asociativnímu a komutativnímu zákonu (viz rovnici (3.8)) platí rovnost

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k. \tag{3.15}$$

Skutečně, stačí použít asociativitu a komutativitu sčítání a vhodně přeuspořádat sčítance. Podobně díky distributivnímu zákonu (viz rovnici (3.9)) je pravdivé tvrzení

$$\sum_{k=1}^{n} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k, \tag{3.16}$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je jistá konstanta, tedy číslo nezávislé na k. Tato rovnice představuje zobecnění známé operace „vytýkání před závorku“. V obou rovnicích (3.15) a (3.16) je naprosto podstatné, že dolní i horní mez je stejná.

Ukažme si tento koncept na konkrétním příkladě. Chceme mluvit o součtu všech přirozených čísel od 3 do 10. Zkrácený zápis je následující

$$S = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \sum_{k=3}^{10} k. \tag{3.17}$$

Porovnejme tento způsob zápisu součtu s použitím `for` cyklu k nalezení tohoto součtu v jazyce C.

[33]Čtenář by mohl v konkrétním případně špatně pochopit, co má doplnit za „tečky“. Mohlo by se tak snadno stát, že čtenáři nedáváme snadno pochopitelnou informaci, ale IQ test. Situace se dále komplikuje, pokud navíc i každý ze sčítanců je opět jistým součtem. Například: $1 + 0 + 0 + 2 + 10 + 4 + 40 + \cdots + 365596 = ?$

```
int main()
{
  int sum = 0;
  for (int k = 3; k <= 10; k++) sum += k;
  printf("Soucet je %d", sum);
  return 0;
}
```

K provádění výpočtů pomocí této sumační notace je dobré umět manipulovat se sčítacími indexy. Například součet S v rovnici (3.17) lze zapsat také jako (sčítáme v opačném pořadí)

$$S = \sum_{k=1}^{8}(11 - k) = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3,$$

nebo (sčítací index běží pěkně od 1 a sčítáme ve stejném pořadí jako původně)

$$S = \sum_{k=1}^{8}(2 + k).$$

Zdůrazněme pointu tohoto odstavce znovu. *Jeden součet lze vyjádřit mnoha ekvivalentními způsoby.*

Někdy se změnou mezí sčítacího indexu součet změnit nemusí, jako například zde

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2.$$

Přidali jsme totiž jen člen odpovídající $k = 0$ splňující $0^2 = 0$ a přičtení nuly nemá na výsledek vliv.

Příklad 3.10 (Gaussův trik)**:** Traduje se, že mladý Gauss a jeho spolužáci dostali ve škole za úkol sečíst všechna čísla od 1 do 100. Gauss jako jediný ve třídě dosáhl dobrého výsledku, neboť nesčítal čísla od nejmenšího k největšímu, ale všiml si, že pokud sečte první (tj. 1) s posledním (tj. 100), dostane součet 101, pokud sečte druhé (tj. 2) a předposlední (tj. 99), dostane opět 101. Takto může postupovat až k $50 + 51 = 101$. Graficky je tento postup znázorněn na obrázku č. 3.7. Výsledek je tedy

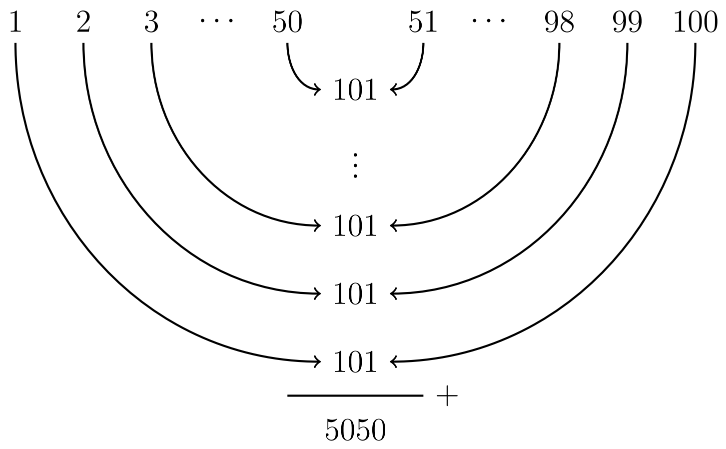
$$50 \cdot 101 = 5050.$$

Obecně platí, že součet čísel od 1 do jistého přirozeného n je

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = n \cdot \frac{n+1}{2}. \tag{3.18}$$

Důkaz Gaussovy součtové formulky. Pomocí sumační notace je snadné Gaussovu myšlenku popsat následovně

$$\sum_{k=1}^{100} k = \sum_{k=1}^{50} \big(k + (101 - k)\big) = \sum_{k=1}^{50} 101 = 50 \cdot 101 = 5050.$$



Obrázek 3.7: Gaussův trik pro sečtení prvních sto přirozených čísel.

Všimněme si, že naprosto stejný trik lze použít v případě, že máme sečíst čísla od 1 do obecného n:

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}(n+1-k) = \sum_{k=1}^{n}\big(k + (n+1-k)\big) = \\ &= \sum_{k=1}^{n}(n+1) = n(n+1) \end{aligned}$$

Dostáváme tak veleznámý vzoreček (3.18). □

K dostatečnému ocenění tohoto výsledku je vhodné si uvědomit rozdíl mezi zadáním (sečíst čísla od 1 do 100) a výsledkem. Na levé straně rovnosti

$$\sum_{k=1}^{100} k = \frac{100 \cdot (100+1)}{2}$$

musíme provést celkem 99 operací sčítání oproti jednomu sčítání, násobení a dělení na straně pravé. Proto byl Gauss jediný, kdo získal dobrý výsledek. Poznamenejme, že když budeme zvětšovat n, bude počet operací na levé straně stále růst, kdežto počet operací nutných k vyhodnocení Gaussova vzorečku bude stále stejný. Implementace tohoto konkrétního součtu pomocí prosté sumy by proto byla značně neefektivní. Pomocí Landauovy symboliky lze toto pozorování vyjádřit konstatováním, že výpočetní složitost součtu samotného je $\mathcal{O}(n)$ a Gaussova vzorce $\mathcal{O}(1)$. O Landauově symbolice se dozvíte na přednáškách BI-MA1.

Další součet, který jsme schopni vyjádřit explicitně bez symbolu sumy, je obsahem následujícího příkladu.

Příklad 3.11 (Součet prvních několika členů geometrické posloupnosti)**:** Pro každé reálné q různé od 1 a přirozené n platí

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q}. \tag{3.19}$$

Důkaz vzorce pro součet členů geometrické posloupnosti. Označme si zkoumaný výraz jako

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Všimněme si, jak se tento výraz chová vzhledem k vynásobení kvocientem q. Konkrétně přímo z definice S_n plynou vztahy

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n = 1 + q\big(1 + q + \dots + q^{n-2} + q^{n-1}\big) = \\ &= 1 + qS_n, \\ S_{n+1} &= S_n + q^n, \end{aligned}$$

platné pro libovolné kladné přirozené n. Porovnáním těchto dvou různých výrazů pro S_{n+1} dostáváme rovnost

$$1 + qS_n = S_n + q^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

odkud

$$S_n(1-q) = 1 - q^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Za uvedeného předpokladu $q \neq 1$ pak ihned dostáváme dokazovaný vztah (3.19).

Alternativně bychom se také mohli odvolat na poznámku 2.4. □

Alternativní důkaz. Každé tvrzení může mít více důkazů, neexistuje vždy jen jeden. Důkazy se od sebe ale mohou lišit svou komplexitou a půvabností. Vzorec pro součet prvních několika členů geometrické posloupnosti bychom alternativně mohli dokázat invokováním již dokázané věty 2.3. V ní položme $a = q$ a $b = 1$. Pak tvrzení uvedené věty po vynásobení obou stran číslem -1 říká, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí rovnost

$$1 - q^n = (1-q)\sum_{k=0}^{n-1} q^k.$$

Za předpokladu $q \neq 1$ tedy dostáváme hledaný vztah

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

□

Otázka 3.9: Lze se v předchozím příkladu zbavit předpokladu $q \neq 1$? Jak je případně nutné změnit formulku (3.19)?

Otázka 3.10: K procvičení základních operací se sumami vypočtěte

$$\sum_{k=1}^{5} 1, \qquad \sum_{k=1}^{6} k - \sum_{k=1}^{6} (k+1).$$

Otázka 3.11: Který z následujících výrazů lze bez dalšího komentáře jednoznačně interpretovat, tedy přiřadit mu jednoznačně číselnou hodnotu?

$$\text{a) } \sum_{k}^{4} k + 1, \quad \text{b) } j\sum_{j=1}^{30} 30k,$$

$$\text{c) } \sum_{j} 2j, \qquad \text{d) } \sum_{j=1}^{2j} \sin j.$$

Zkrácený zápis součinu

Podobně jako součet lze zkráceně zapisovat i součin. K tomu se používá velké řecké písmeno $\prod$ (čti pí, produkt). Například součin prvních deseti přirozených čísel lze zapsat

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = \prod_{k=1}^{10} k.$$

S produkty se manipuluje velmi podobně jako se sumami. Jediným rozdílem je, že místo sčítání používáme násobení, jinak je myšlenka stejná. Například platí

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right),$$
$$\prod_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c^n \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

3.7 Faktoriál a kombinační čísla

Faktoriál kladného přirozeného čísla n je definován předpisem

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k.$$

Připomeňme, že se dále zvlášť definuje faktoriál nuly, $0! := 1$. Faktoriál záporných celých čísel není definován.

Faktoriál lze rozšířit na všechna reálná čísla vyjma záporných celých čísel. Tímto rozšířením je speciální funkce Γ, která splňuje $\Gamma(n+1) = n!$ pro $n \in \mathbb{N}_0$ a navíc platí $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{\ldots, -2, -1, 0\}$. S funkcí Γ se čtenář zajisté setká v předmětu *Pravděpodobnost a statistika* (BI-PST).

Kombinační čísla nacházejí často uplatnění v praktických výpočtech. Pro přirozené n a celé k splňující $0 \leq k \leq n$ definujeme

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}\,.$$

Ačkoliv tato definice vypadá nepřehledně, skutečný význam kombinačního čísla $\binom{n}{k}$ je jednoduchý. Toto číslo představuje počet způsobů, jak z n objektů vybrat k objektů, nezáleží-li na pořadí a neuvažujeme-li opakovaný výběr již vybraného objektu.

Často se hodí znát všechna kombinační čísla pro pevné n. K jejich výpočtu lze použít **Pascalův trojúhelník**. Nejprve si všimněme, že platí rovnost

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}. \tag{3.20}$$

Skutečně,

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!}+\frac{n!}{(n-k)!k!} = \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{n-k+1}+\frac{1}{k}}_{\frac{n+1}{(n-k+1)k}}\Bigg) = \\ &= \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!k!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

Představme si, že uspořádáme kombinační čísla do tzv. **Pascalova trojúhelníku**. Vzorec v rovnici (3.20) nám pak říká, že součet sousedních kombinačních čísel najdeme o řádek níže. Viz obrázek č. 3.8.

Řádky Pascalova trojúhelníky indexujeme od nuly, např. tedy v nultém řádku je pouze 1, v prvním řádku $1, 1$, ve druhém řádku $1, 2, 1$ atd. Tento způsob indexování je konvenčně zvolen tak, aby kombinační čísla $\binom{n}{k}$ ležela v n-tém řádku. Snadněji se pak také pamatuje binomická věta (viz rovnici (2.1)), koeficienty pro výraz $(a+b)^n$ hledáme v n-tém řádku (kdybychom Pascalův trojúhelník indexovali od jedné, pak by tyto koeficienty byly v $(n-1)$-tém řádku, což by nebylo hezké).

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\quad\binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\quad\binom{2}{1}\quad\binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\quad\binom{3}{1}\quad\binom{3}{2}\quad\binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\quad\binom{4}{1}\quad\binom{4}{2}\quad\binom{4}{3}\quad\binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\quad\binom{5}{1}\quad\binom{5}{2}\quad\binom{5}{3}\quad\binom{5}{4}\quad\binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0}\quad\binom{6}{1}\quad\binom{6}{2}\quad\binom{6}{3}\quad\binom{6}{4}\quad\binom{6}{5}\quad\binom{6}{6}$$

$$1$$
$$1\quad 1$$
$$1\quad 2\quad 1$$
$$1\quad 3\quad 3\quad 1$$
$$1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1$$
$$1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1$$
$$1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1$$

Obrázek 3.8: Pascalův trojúhelník.

3.8 Významné konstanty

V aplikacích velmi často narazíme na potřebu počítat s **Eulerovým číslem** (ozn. e) a **Ludolfovým číslem** (ozn. π). Přibližné hodnoty těchto konstant s přesností na tisíc desetinných míst jsou uvedeny níže.

$$
\begin{aligned}
\pi \approx 3.&14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781\\
&64062862089986280348253421170679821480865132823066470938446095505822\\
&31725359408128481117450284102701938521105559644622948954930381964428\\
&81097566593344612847564823378678316527120190914564856692346034861045\\
&43266482133936072602491412737245870066063155881748815209209628292540\\
&91715364367892590360011330530548820466521384146951941511609433057270\\
&36575959195309218611738193261179310511854807446237996274956735188575\\
&27248912279381830119491298336733624406566430860213949463952247371907\\
&02179860943702770539217176293176752384674818467669405132000568127145\\
&26356082778577134275778960917363717872146844090122495343014654958537\\
&10507922796892589235420199561121290219608640344181598136297747713099\\
&60518707211349999998372978049951059731732816096318595024459455346908\\
&30264252230825334468503526193118817101000313783875288658753320838142\\
&06171776691473035982534904287554687311595628638823537875937519577818\\
&57780532171226806613001927876611195909216420199\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e} \approx 2.&71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407\\
&66303535475945713821785251664274274663919320030599218174135966290435\\
&72900334295260595630738132328627943490763233829880753195251019011573\\
&83418793070215408914993488416750924476146066808226480016847741185374\\
&23454424371075390777449920695517027618386062613313845830007520449338\\
&26560297606737113200709328709127443747047230696977209310141692836819\\
&02551510865746377211125238978442505695369677078544996996794686445490\\
&59879316368892300987931277361782154249992295763514822082698951936680\\
&33182528869398496465105820939239829488793320362509443117301238197068\\
&41614039701983767932068328237646480429531180232878250981945581530175\\
&67173613320698112509961818815930416903515988885193458072738667385894\\
&22879228499892086805825749279610484198444363463244968487560233624827\\
&04197862320900216099023530436994184914631409343173814364054625315209\\
&61836908887070167683964243781405927145635490613031072085103837505101\\
&15747704171898610687396965521267154688957035035\ldots
\end{aligned}
$$

Definicí Eulerova čísla se budeme podrobně zabývat na přednáškách BI-MA2. Význam čísla π asi není třeba zdůrazňovat. Jedna z aplikací čísla e souvisí s jeho použitím jako základu v přirozeném logaritmu o kterém se budeme bavit v kapitole 4.10.

4 Elementární funkce

V této kapitole nejprve probereme samotný koncept funkce a dále shrneme vlastnosti několika všeobecně známých reálných funkcí reálné proměnné. Tyto funkce a znalost jejich vlastností by měly patřit do všeobecného přehledu (jakéhosi pomyslného studentova a studentčina *toolkitu*).

4.1 Co je to funkce?

Pro účely tohoto opakovacího textu budeme pod pojmem „funkce“ chápat následující:

Definice 4.1 (Reálná funkce reálné proměnné)**:** Mějme neprázdnou množinu reálných čísel $A \subset \mathbb{R}$. **Reálnou funkcí reálné proměnné** (zkráceně funkcí) f rozumíme *jednoznačný způsob* jak každému číslu x z množiny A přiřadit reálné číslo $f(x)$. Takovouto funkci značíme $f : A \to \mathbb{R}$. Je-li $a \in A$ a přiřazuje-li mu funkce f číslo $b = f(a)$, pak o čísle a mluvíme jako o **vzoru** čísla b a o b jako o **obrazu** čísla a *vzhledem* k funkci f. O $f(a)$ také mluvíme jako o **funkční hodnotě** funkce f v bodě a.

Důležitost pojmu funkce asi ani nelze dostatečně zdůraznit. Hned po pojmu „množina“ půjde v našem nadcházejícím studiu o důležitý stavební kámen (ještě důležitější bude obecnější „zobrazení“, ale tím se budeme zabývat v BI-DML). Důvod by měl být nasnadě. Množiny jsou ze své podstaty „statické“ objekty. Jakmile chceme popisovat změnu, dynamické procesy, či jinak manipulovat s prvky množin, přirozeně jsme vedeni ke konceptu funkce.

Příklad 4.1: Uvažme množinu $A = \langle -1, 1 \rangle$. Pokusme se zadat funkci g následujícím způsobem: „ke každému x z množiny A přiřaďme reálné y splňující $x^2 + y^2 = 1$“. Je tímto způsobem jednoznačně zadána funkce $g : A \to \mathbb{R}$? Mějme tedy $x \in A$. Ptáme se, je-li $y \in \mathbb{R}$ podmínkou $x^2 + y^2 = 1$ zadáno jednoznačně. Tato podmínka je ekvivalentní rovnosti

$$y^2 = 1 - x^2. \tag{4.1}$$

Pokud $x \in A$ pak $1 - x^2 \geq 0$ a rovnice (4.1) má proto dvě řešení (pro $x \neq \pm 1$)

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Které y si máme vybrat? Toto není jednoznačný způsob přiřazení o kterém se mluví v definici funkce. Způsobem popsaným na začátku tohoto příkladu tedy nelze sestrojit funkci. Musíme zadání lehce upravit.

Příklad 4.2: Uvažme množinu $A = \langle -1, 1 \rangle$. Pokusme se zadat funkci g následujícím způsobem: „ke každému x z množiny A přiřaďme ***nezáporné*** reálné y splňující $x^2 + y^2 = 1$“. Je tímto způsobem jednoznačně zadána funkce $g : A \to \mathbb{R}$? Ze začátku lze postupovat stejně jako v předchozím příkladu. Ovšem v okamžiku kdy máme vyřešit rovnici (4.1) vzhledem k y

pro zadané $x \in A$ si stačí uvědomit, že tato rovnice má v tomto případě právě jedno *nezáporné* řešení

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Toto y je obrazem zadaného $x \in A$. Definice funkce g uvedená na začátku tohoto příkladu je tedy v pořádku a my ji po této úvaze můžeme zapsat explicitněji:

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

kde definičním oborem této funkce je $D_g = A = \langle -1, 1 \rangle$.

Mluvíme-li o funkcích je velmi často potřebné souhrnně mluvit o zobrazovaných objektech a možných funkčních hodnotách.

Definice 4.2: Mějme funkci $f : A \to \mathbb{R}$ ve smyslu definice 4.1. O množině A mluvíme jako o **definičním oboru** a značíme ji D_f. Množinu

$$H_f := \{b \in \mathbb{R} \mid (\exists a \in D_f)(f(a) = b)\} \tag{4.2}$$

nazýváme **oborem hodnot** funkce f.

Připomeňme význam symbolického zápisu použitého v rovnici (4.2). Množina H_f je tvořena všemi reálnými b pro které existuje a z definičního oboru funkce f splňující $f(a) = b$. Definiční obor funkce f také občas značíme bez indexu, tj. $D(f)$.

Na tomto místě upozorněme na jeden často se u studentů vyskytující omyl. Je-li dána funkce $f : A \to \mathbb{R}$, pak $\mathbb{R}$ *nemusí nutně být obor hodnot této funkce* f. Například funkce sin, o které se budeme bavit dále, je ve smyslu notace z definice 4.1 funkce $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Její obor hodnot je ovšem množina $H_{\sin} = \langle -1, 1 \rangle$. Což jistě není celá reálná osa.

Čtenář je jistě zvyklý zadávat $f(x)$ pomocí explicitního vzorce udávajícího, jaké operace je potřeba s (reálným) číslem x provést, abychom získali jeho obraz $f(x)$. Toto není jediný způsob zadání funkce f. Na další způsoby narazíme později během studia. Je-li takto zadán funkční předpis (vzorec) bez dalšího komentáře, pak množinu všech reálných x, pro která má $f(x)$ smysl jakožto reálné číslo, nazýváme **maximálním**[1] **definičním oborem** takovéto funkce f.

Například zápisem $f(x) = x^2 + 3x$ máme pro každé reálné x jednoznačné $f(x)$, které získáme provedením uvedených operací (zde vynásobením x sama se sebou a přičtením trojnásobku x). Pokud není řečeno jinak, je tato funkce definovaná na největší možné množině reálných čísel, kde má uvedený předpis smysl, zde tedy $D_f = \mathbb{R}$.

Je dobré neztotožňovat „vzorec" a „funkci". Funkce lze zadat mnoha dalšími způsoby, jak si zanedlouho ukážeme. Také je dobré si uvědomit, že některé vzorce jsou v podstatě v tento okamžik „podvodné" a středoškolská matematika nám mnoho neříká o skutečném výpočtu. Jak například spočteme *hodnotu* $\sqrt{x}$, nebo $\sin(x)$? Pro konkrétní hodnoty x lze k výpočtu použít kalkulačku nebo počítač, ale jak tyto stroje spočtou tyto hodnoty a spočtou je přesně? Tím se budeme mimo jiné zabývat v BI-MA1 a BI-MA2.

Příklad 4.3: Uveďme ještě alespoň jeden příklad. Dejme tomu, že je zadána funkce předpisem

$$h(z) = \sqrt{z^2 - 3z + 2},$$

bez jakéhokoliv komentáře o definičním oboru. Označení nezávisle proměnné z by nás nemělo nijak děsit, i to se může stát. Jejím definičním oborem je tedy výše zmíněný maximální definiční

[1] Někdy též „přirozeným," ale není zde žádnou souvislost s přirozenými čísly.

obor. Ten musíme nalézt. Argument druhé odmocniny musí být nezáporný, tedy z patřící do definičního oboru funkce h musí splnit

$$0 \leq z^2 - 3z + 2 = (z-2)(z-1)$$

Součin dvou reálných čísel je nezáporný, právě když jsou obě daná čísla nezáporná nebo nekladná. Aby z patřilo do D_h musí tedy platit $z \geq 2$ a současně $z \geq 1$ (tj. $z \geq 2$) nebo $z \leq 2$ a současně $z \leq 1$ (tj. $z \leq 1$). Maximálním definičním oborem naší funkce h proto je množina

$$D_h = (-\infty, 1\rangle \cup \langle 2, +\infty).$$

Příklad 4.4: Ne každý vzoreček zadává funkci. Například ani jeden z výrazů

$$\sqrt{-1-x^2}, \qquad \ln\ln\sin(x),$$

nemá dobrý smysl[2] pro žádné reálné x.

K znázornění funkce lze použít její **graf**. Zavedeme-li v rovině dvě pravoúhlé souřadné osy označované standardně x (vodorovná osa, nezávisle proměnná) a y (svislá osa, závisle proměnná), pak grafem funkce f nazýváme množinu bodů $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ splňujících $y = f(x)$. Klademe tedy

$$\operatorname{graf} f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in D_f\}. \tag{4.3}$$

Občas také používáme symbol Γ_f, kde Γ je velké řecké písmenko gama. „Znázornění“ zmíněné na začátku tohoto odstavce tedy spočívá v obarvení bodů v rovině, které mají souřadnice $(x, f(x))$, kde $x \in D_f$, v těchto bodech je zachyceno působení funkce f na bodech $x \in D_f$.

Nyní se budeme věnovat několika typům a druhům známých funkcí. Přehled vlastností mnoha elementárních funkcí a jejich vlastností lze nalézt např. v knížce [1] nebo na stránce [5].

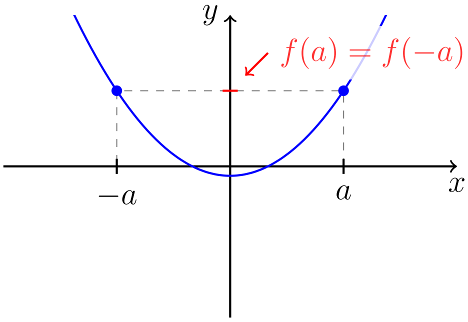
Vlastnosti funkcí

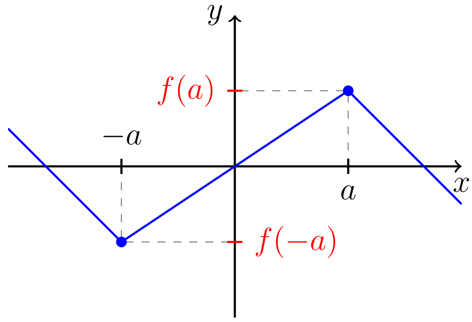
Abychom mohli snadno mluvit o chování funkcí, vyplatí se zavést několik užitečných pojmů. Podle růstu rozlišujeme následující typy:

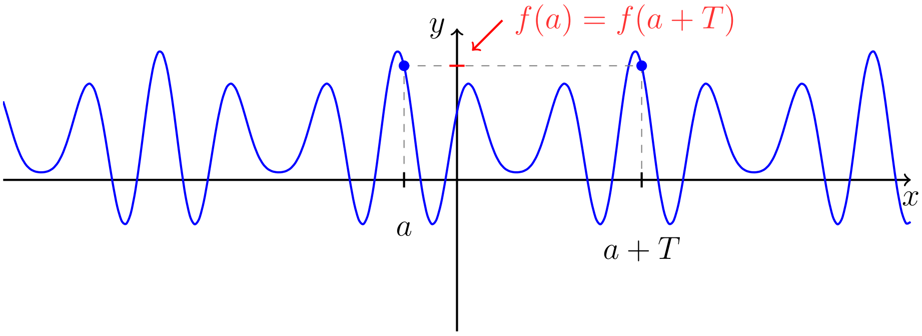
Definice 4.3: Funkce f s definičním oborem $D_f \subset \mathbb{R}$ je *na intervalu* $A \subset D_f$

- **rostoucí**, jestliže $(\forall x, y \in A)\big(x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)\big)$, slovně: jestliže pro každé x a y z množiny A platí, že je-li $x < y$ pak $f(x) \leq f(y)$,
- **ostře rostoucí**, jestliže $(\forall x, y \in A)\big(x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\big)$,
- **klesající**, jestliže $(\forall x, y \in A)\big(x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)\big)$,
- **ostře klesající**, jestliže $(\forall x, y \in A)\big(x < y \Rightarrow f(x) > f(y)\big)$,
- **monotonní**, jestliže je rostoucí nebo klesající,
- **ryze monotonní**, jestliže je ostře rostoucí nebo ostře klesající.

[2] Přesněji, nelze pomocí uvedených operací na reálné hodnotě x získat reálnou hodnotu.







Obrázek 4.1: Grafické znázornění sudosti, lichosti a periodicity v definici č. 4.4 (popořadě).

Zde opět čtenáře upozorňujeme na poznámku 3.1. Námi používané názvosloví není příliš v naší zemi rozšířené, používá se spíše v anglosaské literatuře a terminologii. Je tedy pravděpodobnější, že na něj čtenář narazí při hledání na internetu a případném studiu anglické literatury (viz např. [9]). To je jeden z důvodů motivující naší volbu.

Z hlediska symetrií funkcí rozlišujeme funkce sudé, liché a periodické.

Definice 4.4: Funkce f se nazývá

- **sudá**, jestliže $(\forall x \in D_f)((-x \in D_f)$ a $(f(-x) = f(x)))$,
- **lichá**, jestliže $(\forall x \in D_f)((-x \in D_f)$ a $(f(-x) = -f(x)))$,
- **periodická** s periodou $T > 0$, jestliže $(\forall x \in D_f)((x + T \in D_f)$ a $(f(x) = f(x + T)))$.

Graf sudé funkce je osově symetrický vůči ose y. Graf liché funkce je bodově symetrický vůči počátku souřadnic. Funkční hodnota periodické funkce v bodě x se nezmění s posunutím o T do bodu $x + T$. Tato geometrická interpretace těchto vlastností je názorně vidět na obrázku 4.1.

Konečně na tomto místě připomeňme pojem prosté funkce.

Definice 4.5: Funkci $f : D_f \to \mathbb{R}$ nazýváme **prostou**, právě když pro každá dvě *různá* čísla a a b z definičního oboru funkce f jsou i jejich funkční hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ různé. Ekvivalentně zapsáno symbolicky,

$$(\forall a, b \in D_f)(a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)).$$

Alternativně lze požadavek v definici přeformulovat takto: funkce f je prostá, právě když pro každá dvě čísla $a, b \in D_f$ splňující $f(a) = f(b)$ platí $a = b$.

Příklad 4.5: Například funkce $f(x) = x^2$ definovaná na celém $\mathbb{R}$ není prostá. Není splněn požadavek v definici, stačí zvolit dvě očividně různá čísla $a = 1$ a $b = -1$ pro která platí $f(1) = f(-1)$. V tomto odstavci jsme vyvrátili prostotu funkce f protipříkladem.

Naproti tomu funkce $g(x) = x^3$ definovaná na celém $\mathbb{R}$ už prostá je. Skutečně, vezměme dvě $a, b \in \mathbb{R}$ splňující $g(a) = a^3 = b^3 = g(b)$. Plyne odtud[3] rovnost $a = b$? Z předpokladu použitím známého algebraického vzorce (viz větu 2.3) plyne rovnost

$$0 = a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \tag{4.4}$$

Výraz v druhé závorce je nulový právě tehdy když $a = b$. O tom se můžeme přesvědčit úpravou na čtverec:

$$a^2 + ab + b^2 = a^2 + 2a\frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{3}{4}b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$$

Pokud je alespoň jedno z a, b nenulové, pak z (4.4) nutně plyne $a = b$. Tím je prostota funkce g dokázána.

Poznámka 4.1: Mezi časté studentské mýty patří tvrzení: *funkce f je prostá, právě když každý vzor má právě jeden obraz.* Toto tvrzení platí pro každou funkci, nevyjadřuje prostotu funkce. Je totiž vágní ve smyslu použití sousloví „právě jeden“.

Ve zbytku této kapitoly se budeme zabývat vlastnostmi konkrétních známých funkcí, případně celých tříd funkcí.

4.2 Absolutní hodnota

Pro reálné číslo x klademe

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Funkci $|x|$ nazýváme **absolutní hodnota**. Zápis použitý v rovnici (4.5) je třeba interpretovat následovně: Pokud je dané x větší nebo rovno 0, pak je $|x|$ definována jako x a v případě, že x je záporné, je $|x|$ definována jako $-x$. Graf absolutní hodnoty je vynesen na obrázku č. 4.2.

Shrňme nyní několik základních vlastností absolutní hodnoty. Definičním oborem absolutní hodnoty je zřejmě celá reálná osa, tj. $D_{|x|} = \mathbb{R}$. Oborem hodnot absolutní hodnoty jsou všechny nezáporná reálná čísla, tedy $H_{|x|} = \langle 0, +\infty)$. Skutečně, z definice (4.5) očividně plyne nerovnost $|x| \geq 0$ pro každé x a na druhou stranu pro libovolné $y \geq 0$ platí $|y| = y$. Dále přímo z definice (4.5) jasně plyne[4], že pro každé reálné x a y platí

$$|-x| = |x|, \quad x \leq |x|, \quad -x \leq |x| \tag{4.6}$$

a (rozmyslete!)

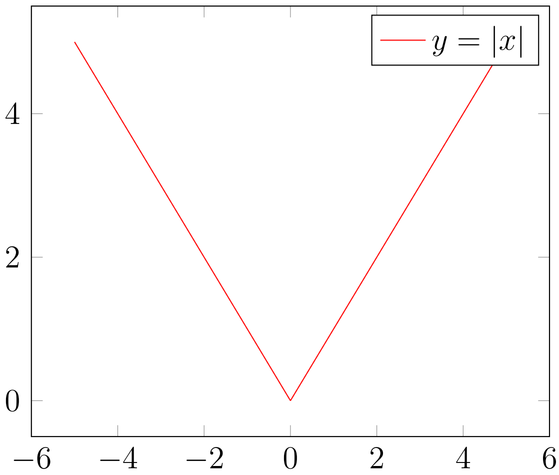
$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \text{pokud } y \neq 0.$$

Z hlediska monotonie je absolutní hodnota (ostře) rostoucí funkce na intervalu $\langle 0, +\infty)$ a (ostře) klesající funkce na intervalu $(-\infty, 0\rangle$. Přímo z definice také vidíme, že se jedná o sudou funkcí, která není prostá.

Další veledůležitou vlastností absolutní hodnoty je tzv. **trojúhelníková nerovnost**. Tu si pro její důležitost (v příštím semestru v BI-MA1 si zkuste uvědomit co vše jsme pomocí ní dokázali) zformulujeme jako samostatnou větu.

[3]Pozor! Zkoumaná rovnost očividně platí v situaci $a = b$. Otázka ale stojí jinak: je toto jediná situace, kdy tato rovnost může nastat?

[4]Rozmyslete si uvedené nerovnosti vždy pro kladná a záporná x zvlášť.



Obrázek 4.2: Graf absolutní hodnoty.

Věta 4.1 (trojúhelníková nerovnost)**:** Pro každé reálné x a y platí nerovnost

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Důkaz. Uvažme libovolně pevně daná reálná x a y. Pokud

- $x + y \geq 0$, pak $|x+y| = x + y \leq |x| + |y|$,
- $x + y < 0$, pak $|x+y| = -(x+y) = -x - y \leq |x| + |y|$.

Skutečně, pro každé reálné z totiž platí $z \leq |z|$. □

Otázka 4.1: Dokažte nebo vyvraťte tvrzení: pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sqrt{x^2} = x$.

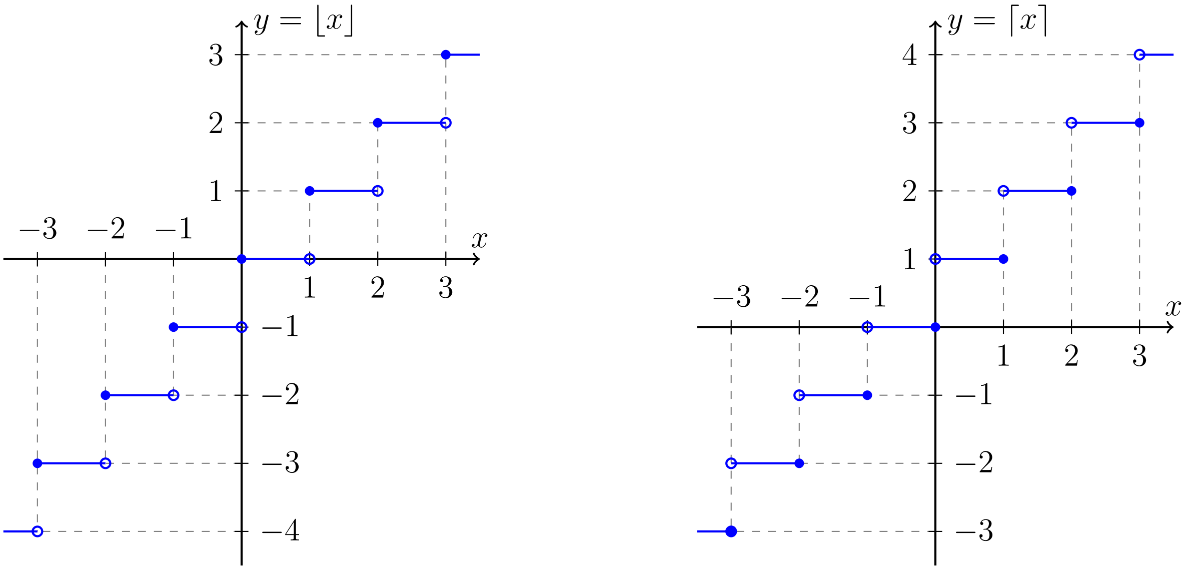
4.3 Dolní a horní celá část

Dalšími často používanými a užitečnými funkcemi jsou **dolní celá část** a **horní celá část** reálného čísla.

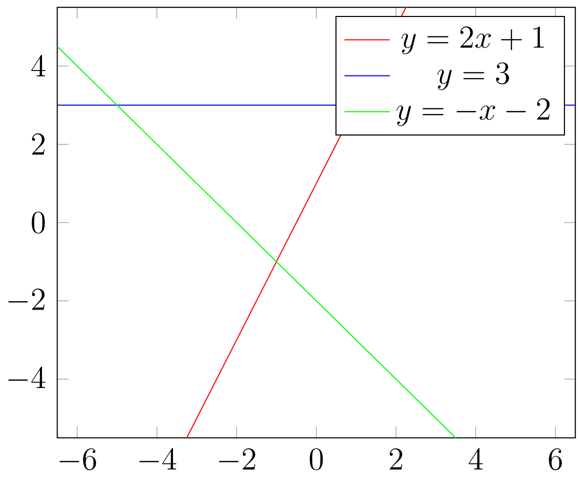
Dolní celá část reálného čísla x je definována jako největší celé číslo menší nebo rovné x a značíme ji $\lfloor x \rfloor$. Podobně horní celá část reálného čísla x je definována jako nejmenší celé číslo větší nebo rovné x a značíme ji $\lceil x \rceil$. Explicitně bychom tedy mohli psát (pouze symbolicky vyjádříme to co jsme v předchozích větách uvedli slovně; viz definici 3.2):

$$\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\},$$
$$\lceil x \rceil = \min\{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq x\}.$$

Definičním oborem horní i dolní celé části je opět celá reálná osa $\mathbb{R}$. Skutečně, dle uvedené konstrukce jsme schopni $\lfloor x \rfloor$, resp. $\lceil x \rceil$, zkonstruovat pro každé reálné číslo x. Oborem hodnot těchto funkcí jsou pak všechna celá čísla, $\mathbb{Z}$. Obě funkce jsou rostoucí (ne ostře; např. $\lfloor 0 \rfloor = \lfloor 1/2 \rfloor$), nejsou sudé, liché ani periodické. Grafy horní a dolní celé části jsou uvedeny na obrázku 4.3.



Obrázek 4.3: Grafy dolní (vlevo) a horní (vpravo) celé části.



Obrázek 4.4: Grafy několika lineárních funkcí.

4.4 Lineární funkce

Lineární funkcí[5] nazýváme každou funkci, pro niž existují konstanty $a, b \in \mathbb{R}$ tak, že rovnost

$$f(x) = ax + b \tag{4.7}$$

platí pro každé $x \in \mathbb{R}$. Grafem lineární funkce je přímka, viz obrázek č. 4.4.

Dle definice je definičním oborem lineární funkce celá reálná osa. Pokud $a \neq 0$, pak oborem hodnot funkce (4.7) je opět celá reálná osa. V případě $a = 0$ je oborem hodnot funkce (4.7) pouze jednobodová množina $H_f = \{b\}$. Shrnuto

$$D_f = \mathbb{R},$$
$$H_f = \begin{cases} \mathbb{R}, & a \neq 0, \\ \{b\}, & a = 0. \end{cases}$$

[5] Z latinského *linealis*, což znamená „přímý“ či „rovný“.

Speciální případ s nulovým a, tj. $f(x) = b$, nazýváme **konstantní funkcí**.

Průsečíky lineární funkce s osou x je snadné nalézt, například rovnice $ax + b = 0$ má řešení $x = \frac{-b}{a}$ za předpokladu, že a je nenulové. Pokud je a nulové a b nenulové, pak příslušná rovnice nemá žádné řešení a žádný průsečík s osou x neexistuje. V případě, že a je nulové a b taktéž, jedná se o nulovou funkci, jejíž graf splývá s osou x.

Monotonie lineární funkce $f(x) = ax + b$ závisí na hodnotě koeficientu a, ten představuje **směrnici** přímky tvořené grafem funkce f. Je-li $a > 0$ (resp. $a \geq 0$), pak je f ostře rostoucí (resp. rostoucí). Je-li $a < 0$ (resp. $a \leq 0$), pak je f ostře klesající (resp. klesající). Konečně, je-li $a = 0$, pak je f rostoucí i klesající zároveň, tj. je konstantní.

Lineární funkce $f(x) = ax + b$ je sudá pouze pokud $a = 0$. Lichá je právě tehdy, když její graf prochází bodem $(0, 0)$, tj. když $f(0) = 0$, nebo ekvivalentně $b = 0$. Je periodická právě tehdy, když je konstantní (tj. $a = 0$). Všimněte si ale, že v tomto případě nemá nejmenší periodu, libovolné kladné číslo je její periodou!

Otázka 4.2: Na začátku této sekce bylo řečeno, že grafem každé lineární funkce je přímka. Je naopak každá přímka grafem lineární funkce?

Otázka 4.3: V předchozím textu byly zmíněny příklady lineárních funkcí $f(x) = ax + b$ s právě jedním, resp. žádným, průsečíkem s osou x. Vyčerpali jsme tím všechny možnosti co se týče počtu průsečíků linárních funkcí s osou x?

Poznámka 4.2 (Terminologická)**:** V prvním semestru budete studovat předmět Lineární algebra 1 (BI-LA1), někteří pak v letním semestru Lineární algebra 2 (BI-LA2), kde ústřední roli hraje pojem *lineární zobrazení*. Na tomto místě čtenáře upozorněme, že slovíčko „lineární“ v lineární algebře znamená požadavek

$$f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha f(y)$$

pro všechny vektory x, y a všechna čísla α. Tuto podmínku zde zavedené lineární funkce splňují jen a pouze pokud $b = 0$, tj. právě když jejich grafy procházejí počátkem souřadného systému. Naše lineární funkce $f(x) = ax + b$ pro nenulové b bývají proto v lineární algebře označovány jako **affiní** funkce (zobrazení).

4.5 Kvadratická funkce

Kvadratickou funkcí nazýváme každou funkci, pro níž existují konstanty $a, b, c \in \mathbb{R}$, s $a \neq 0$ takové, že rovnost

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{4.8}$$

platí pro každé $x \in \mathbb{R}$. Definičním oborem takovéto funkce je dle definice celá reálná osa $\mathbb{R}$. Grafem kvadratické funkce je **parabola**, viz obrázek č. 4.5. Souřadnice jejího vrcholu snadno odhalíme po **úpravě na čtverec**:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c - \frac{b^2}{4a} = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Tato úprava je motivována jednoduchým požadavkem, aby se po ní nezávisle proměnná x vyskytovala pouze v umocňovaném výrazu (tzv. čtverci). Toho docílíme šikovným doplněním členů s x^2 a x tak jak je to zde uvedeno. Snažíme se pouze využít známého vztahu $(x+\beta)^2 = x^2 + 2\beta x + \beta^2$.

Kvadrát závorky v (4.9) je vždy nezáporný. Odtud pak plyne, že vrchol paraboly se nachází v bodě o souřadnicích (horizontální souřadnice (hodnota x) vrcholu odpovídá číslu, které vynuluje kvadrát)

$$\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a} \right).$$

Z rovnice (4.9) je patrné, že znaménko koeficientu a rozhoduje o tom, zda jsou všechny funkční hodnoty větší (menší) nebo rovny $c - \frac{b^2}{4a}$. Oborem hodnot naší kvadratické funkce proto je

$$H_f = \begin{cases} \left\langle c - \frac{b^2}{4a}, +\infty \right), & a > 0, \\ \left(-\infty, c - \frac{b^2}{4a} \right\rangle, & a < 0. \end{cases}$$

Pro průsečíky grafu funkce f s osou x platí známý vztah

$$x_{\pm} = \frac{1}{2a}\Big(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \Big). \tag{4.10}$$

Rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má tedy reálná řešení za předpokladu nezápornosti **diskriminantu** $D = b^2 - 4ac$.

Důkaz vzorce pro kořeny kvadratické funkce. Vzorec pro hodnoty kořenů můžeme také odvodit z úpravy na čtverec. Hledáme-li kořeny, tj. řešení rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ a použijeme-li rovnosti (4.9) dostáváme po přímočaré úpravě ekvivalentně rovnost

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Za předpokladu $D = b^2 - 4ac \geq 0$ odtud lze řešení vyjádřit následovně:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}.$$

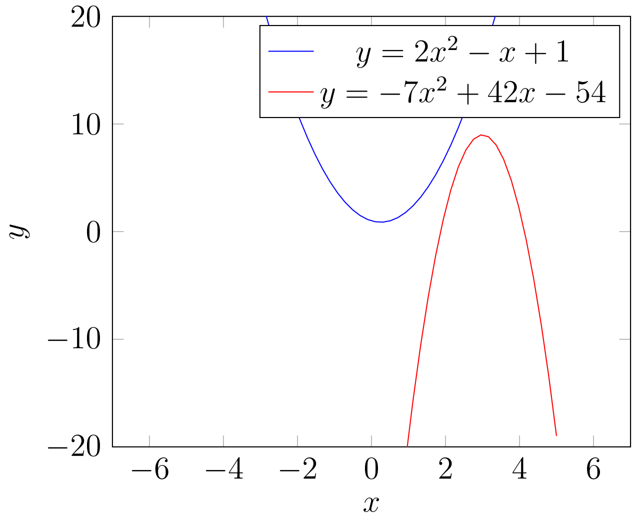
Díky znaménku $\pm$ lze psát souhrnně

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

což je přesně hledaný vztah (4.10). □

Na tomto místě je vhodné zdůraznit, že korektních důkazů různých tvrzení může být více. Některé mohou být snazší, některé komplikovanější. Například pokud bychom chtěli pouze ověřit platnost předkládaného tvrzení, tedy že $x_{\pm}$ dané vztahy (4.10) jsou skutečně kořeny kvadratické funkce (4.8) stačí postupovat následovně[6]:

[6] Samozřejmě abychom toto mohli provést, museli jsme onen vztah pro kořeny od někoho dostat, nebo jsme ho mohli v záchvatu geniality uhodnout.



Obrázek 4.5: Ukázka grafů dvou kvadratických funkcí.

Alternativní důkaz vzorce pro kořeny kvadratické funkce. Platnost vztahu (4.10) můžeme také velmi snadno ověřit prostým dosazením. Ukažme, že x_+ je kořenem naší kvadratické funkce z rovnice (4.8).

$$ax_+^2 + bx_+ + c = a \cdot \frac{1}{4a^2}\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2 + \frac{b}{2a}\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right) + c =$$
$$= \frac{1}{4a}\left(b^2 - 2b\sqrt{b^2 - 4ac} + b^2 - 4ac\right) - \frac{b^2}{2a} + \frac{b}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} + c = 0$$

Bod x_+ je tedy kořenem! Zcela analogicky se dá ověřit, že bod x_- je taktéž kořenem paraboly (4.8). Opět zde ale zdůrazněme, že předpokladem provedení tohoto důkazu je znalost $x_\pm$. Dříve uvedený důkaz toto nevyžadoval, současně hledané hodnoty našel! □

Otázka 4.4: Nechť $a > b > 0$. O číslech a a b říkáme, že jsou ve zlatém poměru[7], pokud poměr $a + b$ ku a je stejný jako a ku b. Jaký je tento poměr, tedy $\varphi = \frac{a}{b}$?

Poznámka 4.3 (Viètovy vzorce)**:** Ve školních příkladech, jejichž řešení typicky vychází „pěkně," lze často kořeny kvadratického polynomu uhodnout. Občas také při přemýšlení pomohou tzv. **Viètovy vzorce**[8], které představují vztahy mezi koeficienty polynomu a jeho kořeny. Pokud platí rovnost polynomů

$$x^2 + bx + c = (x - x_+)(x - x_-) = x^2 - (x_+ + x_-)x + x_+x_-,$$

pak nutně platí rovnost jejich koeficientů, čili po drobné úpravě

$$x_+ + x_- = -b,$$
$$x_+x_- = c.$$

[7] Hodnota tohoto poměru se také někdy nazývá zlatým řezem.

[8] François Viète, Seigneur de la Bigotière, byl francouzský matematik žijící žijící v letech 1540 až 1603.

Pozor, pro jednoduchost jsme koeficient u kvadratického členu položili roven jedné. To ovšem při hledání kořenů nemá újmu na obecnosti.

Například, máme-li hledat kořeny polynomu $x^2 + 5x + 6$, pak z předchozího pozorování je jejich součin roven 6 a jejich součet -5. Které dvě čísla toto splňují? Přeci $x_+ = -2$ a $x_- = -3$. Platí tedy $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

4.6 Polynomy (mnohočleny)

Čtenáři je jistě dobře známo, jak definovat celočíselnou **mocninu** reálného čísla a. Na tomto místě si ji připomeneme. Pro přirozené n klademe

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ členů}} \tag{4.11}$$

a pro $n = 0$ pak $a^0 := 1$ (i v případě $a = 0$). Pro záporná celá čísla n a nenulová a dále definujeme $a^n := \frac{1}{a^{-n}}$. Číslo $-n$ je pak kladné celé a ve jmenovateli tak můžeme použít (4.11). Například proto platí

$$\pi^0 = 1, \quad 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16, \quad 3^{-2} = \frac{1}{9}, \quad 0^0 = 1.$$

Dle této definice mocniny je zřejmé, že pro každá reálná nenulová a a celá k a n platí důležité vztahy (rozmyslete!)

$$a^k \cdot a^n = a^{k+n} \quad \text{a} \quad \left(a^k\right)^n = a^{kn}. \tag{4.12}$$

Operaci „mocnění“ s $a > 0$ lze definovat nejen pro celočíselné koeficienty. V tento okamžik není jasné, jak definovat (natož pak vypočíst) hodnotu výrazu 3^π či $1.2^{2.8}$. Podrobněji se touto otázkou budeme zabývat v BI-MA2.

Zobecněním lineárních a kvadratických funkcí jsou polynomy. **Polynomem** nazýváme každou funkci tvaru

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad x \in D_f = \mathbb{R},$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$. Pokud $a_n \neq 0$, pak n nazýváme **stupněm polynomu** f. Reálné konstanty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ určují funkci f stejně jako v předchozích případech konstanty a, b, c u lineární, resp. kvadratické, funkce. K zdůraznění oboru v jakém se pohybujeme občas o funkcích zavedených výše mluvíme jako o *reálných polynomech*. Tyto konstanty často nazýváme koeficienty polynomu. V české literatuře se také o polynomech občas mluví jako o **mnohočlenech**.

O polynomu $P(x) = 0$ mluvíme jako o **nulovém polynomu**. Všimněte si, že jeho stupeň není v odstavci výše definován (máme zde $n = 0$ a $a_0 = 0$). Existuje několik různě motivovaných konvencí, jak jeho stupeň zavést, pro naše účely to nyní není podstatné a proto tak činit nebudeme. Zdůrazněme pouze dvě pravdivá tvrzení, která studenty často překvapují:

- polynom stupně nula je nenulový konstantní polynom,
- nulový polynom nemá stupeň nula.

Mezi polynomiální funkce patří samozřejmě jak lineární, tak kvadratické funkce, zmíněné dříve. Společným rysem polynomů je, že pro výpočet jejich funkčních hodnot vystačíme pouze s operacemi sčítání a násobení. V tomto smyslu se tedy skutečně jedná o jedny z nejjednodušších (elementárních) funkcí. Tyto operace lze navíc levně počítat, i když zpravidla nepřesně, na CPU, resp. FPU, a proto i vyhodnocování funkčních hodnot polynomů je snadné[9].

Definičním oborem libovolného polynomu je celá reálná osa, $D_f = \mathbb{R}$. Pokud je stupeň polynomu lichý, pak je jeho oborem hodnot také celé $\mathbb{R}$. Pokud však je stupeň polynomu sudý, pak je oborem hodnot pouze část reálné osy (konkrétně jistá polopřímka nebo bod v případě konstantního polynomu).

Hledání kořenů polynomů je obecně komplikovaná úloha. Explicitní vzorečky, jako například (4.10), jsou známé pouze pro polynomy stupně 1, 2, 3 a 4. Pro polynomy vyššího stupně nejen že nejsou známy vzorce pro kořeny, ale je *dokázáno*, že takovéto vzorce neexistují[10]. Zdůrazněme tento fakt ještě jednou. Je-li zadán polynom stupně alespoň pět, pak vzorec udávající přímo jeho kořeny neexistuje a ani nikdy existovat nebude. Při hledání kořenů se pak musíme uchýlit k numerickým metodám[11].

Otázka 4.5: Která z následujících funkcí je polynomem?

1. $f(x) = x^2 + 2x + 3 + \frac{4}{x}$,
2. $f(x) = x \sin(2) - x^3$,
3. $f(x) = e^{2\ln(1+x^2)}$,
4. $f(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1}$.

Jediná středoškolská „metoda“ pro hledání kořenů polynomu $P(x)$ stupně většího než dva[12] spočívá v opakování následujících kroků

1. uhodni jeden kořen, označme si ho λ (řecké písmenko lambda),
2. vytkni (například pomocí algoritmu dělení polynomu polynomem) příslušný **kořenový činitel**, tj. $P(x) = (x - \lambda)Q(x)$, kde polynom $Q(x)$ má o jedničku menší stupeň než polynom $P(x)$,
3. vrať se do prvního bodu, ale hádej kořen polynomu $Q(x)$, který má o jedničku menší stupeň, než polynom $P(x)$.

Tento proces se opakuje tak dlouho, dokud se nedostaneme k polynomu stupně dva, jehož kořeny již umíme nalézt pomocí vzorce (4.10).

Je vhodné si uvědomit, že tento postup skutečně *není* algoritmem řešícím úlohu najít kořeny zadaného polynomu. Prvním úkolem je esoterický krok opírající se o náhodu, resp. kreativní vnuknutí. Zkuste tento postup například aplikovat na následující polynom (stále dost malého stupně):

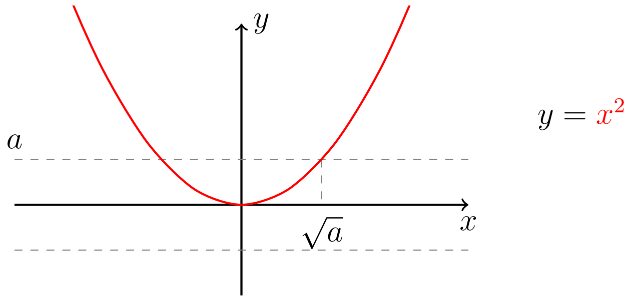
$$12\,x^6 - x^5 + 57\,x^4 - 10\,x^3 - 9738\,x^2 + 759\,x + 47817.$$

[9] Uvedené problémy s přesností v tento okamžik ignorujme.

[10] Vnímejte tuto větu v její plné osudovosti: nejen, že ony hypotetické vzorce nikdo nezná, ale nikdo je ani znát v budoucnu nebude, protože neexistují.

[11] Viz například metoda půlení intervalu či Newtonova metoda probíraná v BI-MA1.

[12] Kořeny polynomu stupně jedna a dva umíme nalézt snadno.



Obrázek 4.6: Ke konstrukci sudé odmocniny čísla a.

Na tomto místě je vhodné čtenáři doporučit zopakovat si algoritmus dělení polynomu polynomem. Tento algoritmus nalezne využití nejen v úloze na hledání kořenů polynomů, ale nachází i velmi důležité aplikace v počítačové bezpečnosti a šifrování.

Otázka 4.6: Nalezněte kořeny následujících polynomů.

1. $x^2 + x - 12$,
2. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$,
3. $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$.

Otázka 4.7: Mějme obecně polynom $P(x)$ stupně n s koeficientem u jeho nejvyšší mocniny roveným 1, tj.

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Jaký je vztah mezi konstatním členem a_0 a kořeny polynomu n?

Otázka 4.8: Pro polynom stupně dva jsme měli k dispozici Viètovy vzorce. Pokuste se odvodit jejich analog pro polynom stupně tři $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

4.7 Odmocniny

Uvažme nyní reálné číslo a a přirozené číslo n. Pomocí přirozené mocniny definujeme **přirozené odmocniny** jako jisté (viz níže) reálné řešení rovnice $x^n = a$. Toto řešení, existuje-li, pak označujeme symbolicky následujícími dvěma způsoby

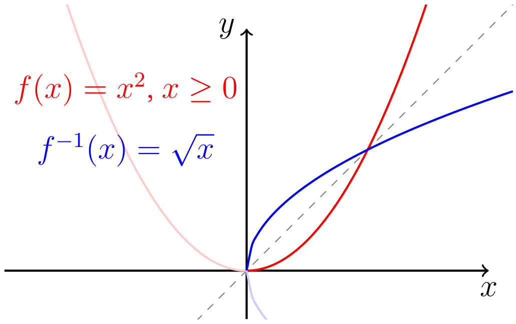
$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad n \in \mathbb{N},$$

Je nutné rozlišit případy lichého a sudého n a rozmyslet si v jakých případech tato konstrukce má dobrý smysl.

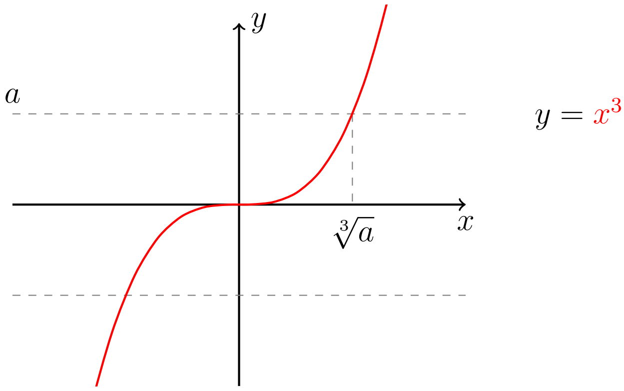
Sudá odmocnina

Je-li $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, *sudé*, pak $x^n \geq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, což znamená, že rovnice $x^n = a$ má reálné řešení jen pro $a \geq 0$. Tato situace je graficky znázorněna na obrázku 4.6.

Pro $a > 0$ jsou tato řešení právě dvě, neboť $x^{2k} = (-x)^{2k}$. **Sudou odmocninu** $\sqrt[2k]{a}$ definujeme jako nezáporné řešení rovnice $x^{2k} = a$. Proto například $\sqrt{x^2}$ je rovna $|x|$ a nikoli x. Pro $a = 0$ je toto řešení právě jedno a tedy $\sqrt[2k]{0} = 0$.



Obrázek 4.7: Druhá mocnina a druhá odmocnina.



Obrázek 4.8: Konstrukce liché odmocniny čísla a.

Z výše uvedeného je patrné, že definičním oborem i oborem hodnot funkce $\sqrt[2k]{x}$ je množina $\langle 0, +\infty)$. Dále platí rovnosti

$$\sqrt[2k]{x^{2k}} = \left(\sqrt[2k]{x}\right)^{2k} = x \quad \text{pro každé } x \geq 0.$$

Jinak řečeno, $\sqrt[2k]{x}$ je inverzní funkcí k x^{2k} zúžené na množinu $\langle 0, +\infty)$. Viz obrázek č. 4.7.

Lichá odmocnina

Je-li $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$, *liché*, pak rovnice $x^{2k-1} = a$ má vždy právě jedno reálné řešení, o kterém mluvíme jako o **liché odmocnině** a a značíme ji opět $\sqrt[2k-1]{a}$. Například $\sqrt[3]{-8} = -2$. Viz obrázek č. 4.8.

Definičním oborem i oborem hodnot liché odmocniny je celá množina $\mathbb{R}$. Lichá mocnina a příslušná lichá odmocnina jsou k sobě navzájem inverzní, tedy platí

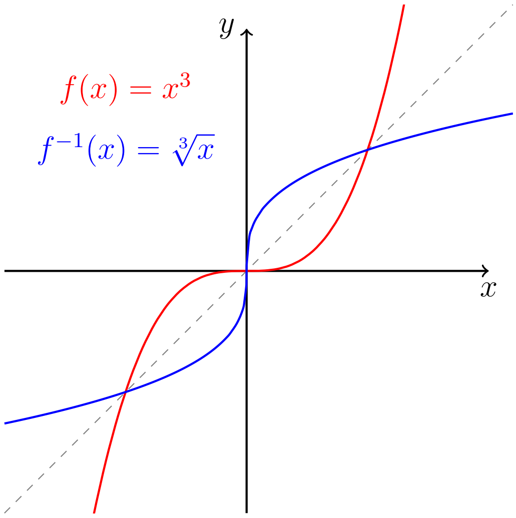
$$\sqrt[2k-1]{x^{2k-1}} = \left(\sqrt[2k-1]{x}\right)^{2k-1} = x \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Pro ilustraci viz obrázek č. 4.9.

4.8 Racionální (lomená) funkce

Racionální (lomená) funkce je každá funkce tvaru

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$



Obrázek 4.9: Třetí mocnina a třetí odmocnina.

kde P a Q jsou polynomy a Q není nulový polynom. Obecně lze říci, že definičním oborem takovéto funkce je množina všech reálných čísel bez kořenů polynomu Q, tj.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}.$$

Mezi racionální lomené funkce patří lineární, kvadratické funkce a všechny polynomy. Skutečně, stačí volit $Q(x) = 1$, pro $x \in \mathbb{R}$ a P libovolný polynom.

Další známou podtřídou racionálních lomených funkcí jsou funkce tvaru

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde $P(x) = ax + b$ je nenulový polynom stupně nejvýše jedna, $Q(x) = cx + d$ je polynom stupně jedna a P i Q nemají společný kořen (kdyby tomu tak bylo, dostali bychom „konstantní“ funkci nedefinovanou v jednom jediném bodě). Grafem takovýchto funkcí je **hyperbola** s asymptotami $y = \frac{a}{c}$ a $x = -\frac{d}{c}$.

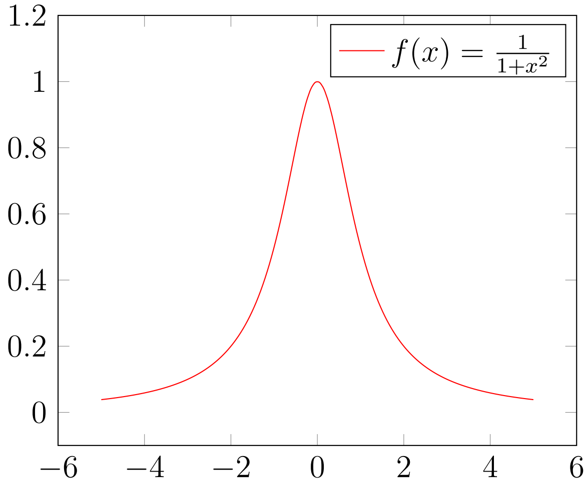
O oboru hodnot obecné racionální lomené funkce už není snadné jednoduše něco říci a tuto otázku proto vynecháme. Na několika příkladech si alespoň ukážeme, že mohou nastat velmi různorodé situace (viz obrázek č. 4.10).

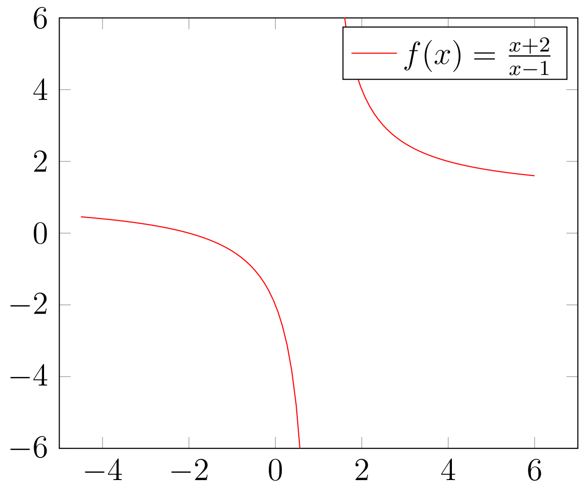
4.9 Trigonometrické funkce

Mezi **trigonometrické funkce** (často též **goniometrické funkce**) řadíme sinus (sin), kosinus (cos), tangens (tg) a kotangens (cotg). Dále se v této kapitole zmíníme o jejich *vhodně zvolených* inverzích, tedy funkcích arkus sinus (arcsin), arkus kosinus (arccos) a arkus tangens (arctg).

Funkce sinus a kosinus jsou definovány pomocí následující geometrické konstrukce či algoritmu. Na vstupu je zadán úhel[13] α a výsledkem bude hodnota $\sin(\alpha)$ a $\cos(\alpha)$. Při čtení algoritmu je vhodné sledovat obrázek č. 4.11.

[13]Přesněji, velikost úhlu, tuto nuanci však příliš nerozlišujeme. Tu měříme v radiánech, pokud není uvedeno jinak.





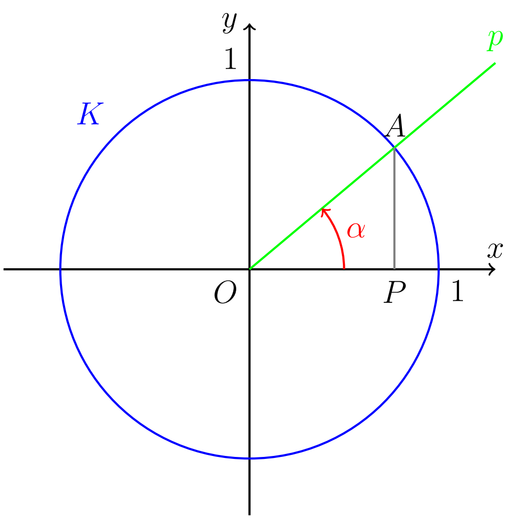
Obrázek 4.10: Příklady racionálních lomených funkcí.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Tabulka 4.1: Některé význačné hodnoty funkcí sin a cos.

1. V počátku souřadného systému s pravoúhlými osami x a y sestroj **jednotkovou kružnici** K (tj. kružnici s poloměrem 1 v daných jednotkách os a středem v bodě $(0, 0)$).
2. Od kladného směru osy x vynes úhel[14] α proti směru hodinových ručiček. Jedním ramenem tohoto úhlu je kladná část osy x a druhé rameno označme p.
3. Označme A průnik p a K. Dále sestrojme bod P, průnik osy x a rovnoběžky s osou y procházející bodem A. Tímto způsobem získáváme pravoúhlý trojúhelník OPA.
4. (Orientovaná) délka strany OP představuje cos(α) a délka strany PA představuje sin(α).

[14] Úhel měříme v radiánech.



Obrázek 4.11: Geometrická konstrukce trigonometrických funkcí sinus a kosinus.

Přesnost výsledku samozřejmě závisí na přesnosti našich rýsovacích nástrojů. Nekonečné přesnosti lze dosáhnout pouze v případě nekonečně přesných nástrojů (zde pravítko, kružítko a úhloměr). Je zřejmé, že tato metoda „výpočtu“ není příliš praktická. V předmětu BI-MA2 si ukážeme, jak efektivně vyhodnocovat funkční hodnoty (nejen) těchto funkcí.

Základní hodnoty funkcí sinus a kosinus jsou shrnuty v tabulce č. 4.1 a jejich grafy si můžete připomenout na obrázku č. 4.12. Z konstrukce je také poměrně patrné, že s funkcemi sinus a kosinus se setkáme jakmile budeme studovat kmitající (oscilující) jevy. Je tomu přesně tak, nejznámější uplatnění v tomto směru je analýza a zpracování signálu (např. audio ve vašem počítači) pomocí Diskrétní Fourierovy transformace (DFT), resp. Rychlé Fourierovy transformace (FFT).

Přímo z konstrukce funkcí sinus a kosinus ihned plyne důležitá vlastnost těchto funkcí,

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4.13}$$

Tato rovnost pouze vyjadřuje Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku OPA s přeponou délky 1 a odvěsnami délky $\sin(\alpha)$ a $\cos(\alpha)$ (viz popis výše a obrázek č. 4.11).

Dále je z uvedené konstrukce patrné, že funkce sinus je lichá a kosinus sudá, tedy

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad \text{a} \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pro definiční obory těchto funkcí platí

$$D_{\sin} = D_{\cos} = \mathbb{R}$$

a pro obory hodnot platí

$$H_{\sin} = H_{\cos} = \langle -1, 1 \rangle.$$

Konečně, obě funkce jsou **periodické** s nejmenší periodou 2π, obě funkce jsou definovány na celém $\mathbb{R}$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí rovnosti $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ a $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

Velmi užitečné jsou tzv. **součtové vzorce** pro funkce sinus a kosinus. Tyto vzorce lze nejsnadněji odvodit pomocí vlastností násobení komplexních čísel s využitím goniometrického tvaru komplexního čísla. Pro libovolná reálná α a β platí rovnosti

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta), \tag{4.14}$$

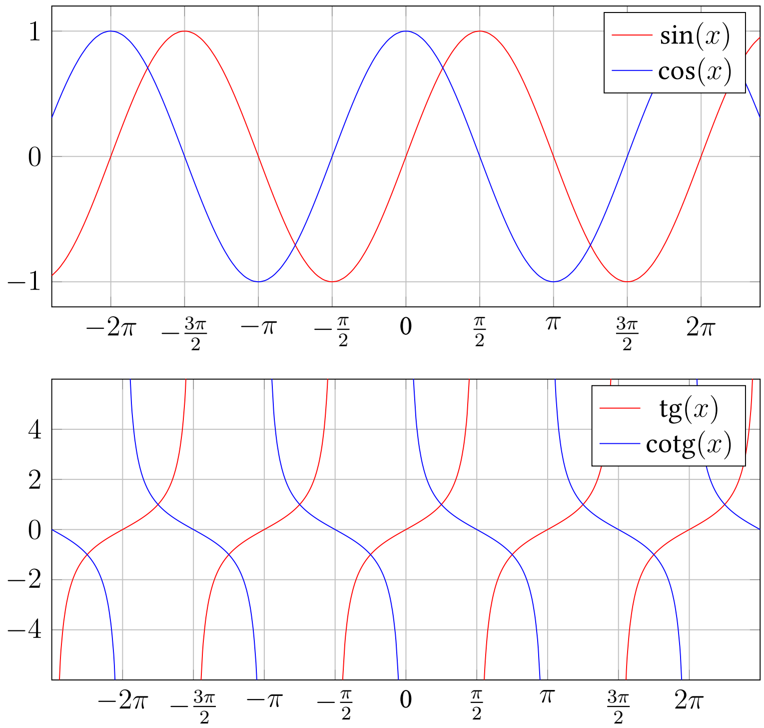
resp.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta). \tag{4.15}$$

Díky sudosti funkce kosinus a lichosti funkce sinus ze vzorců (4.14) a (4.15) ihned dostáváme analogické vzorce pro rozdíl

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta), \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta). \end{aligned}$$

Podobné vzorce lze odvodit pro funkce tangens i kotangens. Význam těchto vzorců a jejich využití je nasnadě: máme-li informaci o hodnotách $\sin\alpha$ a $\cos\beta$, pak nám tyto vzorce umožňují získat informaci např. o hodnotě $\sin(\alpha + \beta)$. Některé algoritmy na výpočet funkčního hodnot trigonometrických funkcí jsou na těchto vztazích založeny (k dispozici je tabulka předpočtených hodnot pro větší množství vhodně zvolených úhlů z nichž se šikovně snažíme sčítáním a odčítáním nakombinovat uživatelem zadaný úhel – algoritmus CORDIC, poprvé použitý v navigačním počítači bombardéru B-52).



Obrázek 4.12: Trigonometrické funkce sin, cos, tg a cotg.

Dále ze vzorců (4.14) a (4.15) plynou vzorce pro tzv. **dvojnásobný úhel**, které se používají velmi často:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha),$$

resp.

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha). \tag{4.16}$$

Pomocí vztahů (4.13) a (4.16) ihned odvodíme vzorce pro sinus a kosinus polovičního úhlu,

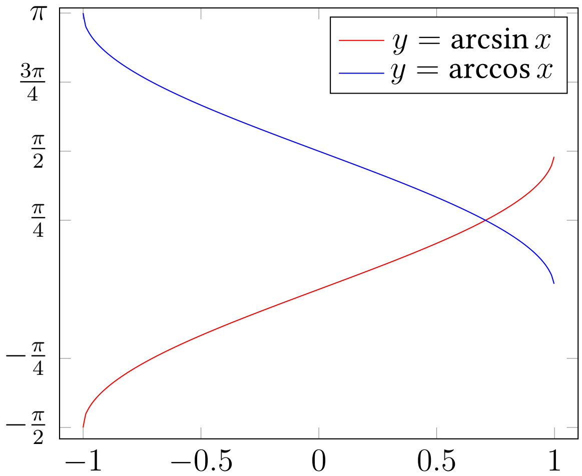
$$\cos^2(\alpha/2) = \frac{1}{2}\big(1+\cos(\alpha)\big), \qquad \big|\cos(\alpha/2)\big| = \sqrt{\frac{1}{2}\big(1+\cos(\alpha)\big)},$$
$$\sin^2(\alpha/2) = \frac{1}{2}\big(1-\cos(\alpha)\big), \qquad \big|\sin(\alpha/2)\big| = \sqrt{\frac{1}{2}\big(1-\cos(\alpha)\big)}.$$

Pokud bychom se v těchto vzorcích chtěli zbavit absolutních hodnot, museli bychom o znaménku výrazů rozhodnout na základě úhlu α, přesněji jeho příslušnosti do některého ze čtyř kvadrantů.

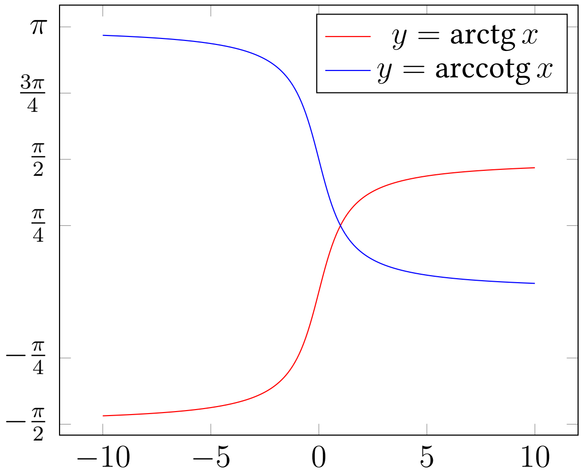
Pomocí funkcí sin a cos definujeme funkce tangens tg a kotangens cotg předpisy

$$\operatorname{tg}\alpha := \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \in D_{\operatorname{tg}} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\},$$
$$\operatorname{cotg}\alpha := \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \in D_{\operatorname{cotg}} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Jejich obory hodnot jsou tvořeny celou množinou $\mathbb{R}$. Pro názornost uvádíme i jejich grafy na obrázku č. 4.12.



Obrázek 4.13: Grafy funkcí arcsin a arccos.



Obrázek 4.14: Grafy funkcí arctg x a arccotg x.

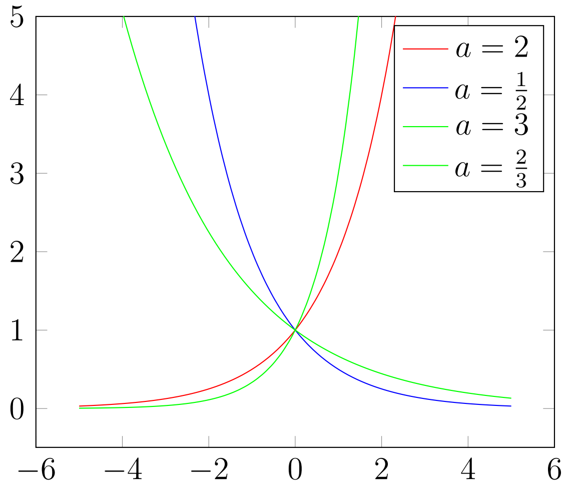
Ani jedna z doposud zavedených trigonometrických funkcí není prostá na svém definičním oboru. Pokud zvolíme libovolné y z oboru hodnot funkce sin, pak existuje nekonečně mnoho x z definičního oboru funkce sin tak, že $\sin(x) = y$ (viz obrázek č. 4.12). Nelze tedy zadanému $y \in H_{\sin}$ jednoznačně přiřadit $x \in D_{\sin}$ splňující $y = \sin(x)$. Stejná poznámka platí i pro cos, tg a cotg. Trigonometrické funkce nejsou prosté, a proto k nim neexistují inverzní funkce.

K vyřešení tohoto problému musíme trigonometrické funkce vhodně zúžit, tedy zmenšit jejich definiční obor. Ve shodě se zažitou konvencí definujeme

- **arkus sinus**, arcsin, jako inverzní funkci k sin zúžené na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$,
- **arkus kosinus**, arccos, jako inverzní funkci k cos zúžené na interval $\langle 0, \pi \rangle$,
- **arkus tangens**, arctg, jako inverzní funkci k tg zúžené na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
- **arkus kotangens**, arccotg, jako inverzní funkci k cotg zúžené na interval $(0, \pi)$.

Otázka 4.9: Z geometrické definice funkcí sin a cos odvoďte hodnoty $\sin \frac{\pi}{3}$ a $\cos \frac{\pi}{3}$.

Otázka 4.10: Z geometrické definice funkcí sin a cos odvoďte hodnoty $\sin \frac{\pi}{4}$ a $\cos \frac{\pi}{4}$.



Obrázek 4.15: Exponenciální funkce s různými základy.

Otázka 4.11: Bez použití kalkulačky (ta by výsledek ani nedala přesně) vypočtěte hodnotu následujících výrazů.

1. $\arcsin \sin \frac{9\pi}{4}$,
2. $\sin \frac{7\pi}{4}$.

Otázka 4.12: Odvoďte součtový vzorec pro funkci tg. Tzn. vyjádřete $\operatorname{tg}(x+y)$ pomocí $\operatorname{tg}(x)$ a $\operatorname{tg}(y)$.

4.10 Exponenciální a logaritmické funkce

Pro $0 < a \neq 1$ funkci[15]

$$f(x) = a^x, \quad x \in D_f = \mathbb{R},$$

nazýváme **exponenciálou o základu** a. Tato funkce rozšiřuje mocninnou funkci ze začátku této podkapitoly i na neceločíselné exponenty. Pro libovolná reálná x a y platí známé vzorce

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \text{a} \quad \left(a^x\right)^y = a^{xy}.$$

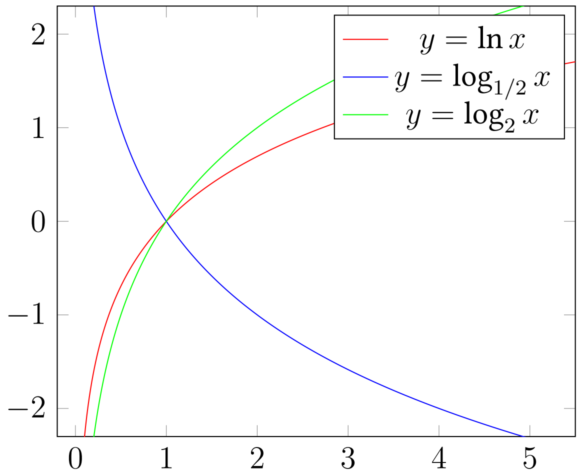
Na obrázku 4.15 je znázorněn známý průběh funkce f pro různé základy a.

Poznamenejme, že předchozí odstavec nelze považovat za definici exponenciální funkce. Jde spíše o dohodnutí značení. Problému, jak skutečně funkci oplývající uvedenými vlastnostmi zkonstruovat, se budeme věnovat v průběhu BI-MA2.

Exponenciální funkce (a její další případná zobecnění) je velmi důležitá v reálných přírodních aplikacích. Na tomto místě pouze lehce krypticky zmiňme, že se objevuje v situacích, kdy je možné míru změny jisté veličiny považovat za přímo úměrnou její hodnotě. Typický příkladem procesů popsaných pomocí exponenciálních funkcí jsou tak rozdílné jevy[16] jako

[15] Definicí obecné mocniny, tj. hodnoty a^x, pro kladné a a reálné x se podrobně budeme zabývat v BI-MA2. V tento okamžik k této funkci přistupujeme stejným způsobem jako na středních školách, tedy axiomaticky.

[16] Opět pěkná ukázka univerzality matematiky.



Obrázek 4.16: Grafy několika logaritmických funkcí s různými základy.

je radioaktivní rozpad a šíření viru v populaci (alespoň v jisté fázi). Dále na ni narazíme při popisu složitosti algoritmů, kdy si na vystihnutí chování některých algoritmů nevystačíme s polynomiálními funkcemi: exponenciální funkce (s různými základy) nám umožňují popsat závislosti rostoucí (nebo klesající) „řádově" silněji, než polynomy.

Obecně lze říci, že pro $a > 1$ je f ostře rostoucí ($f(x) < f(y)$ kdykoliv $x < y$), $D_f = \mathbb{R}$ a $H_f = (0, +\infty)$. Pro $a < 1$ je f ostře klesající ($f(x) > f(y)$ kdykoliv $x < y$), $D_f = \mathbb{R}$ a $H_f = (0, +\infty)$.

Exponenciální funkce není sudá, lichá, ani periodická. Je ovšem prostá, ale není na (není surjektivní).

Logaritmus

Inverzní funkci k exponenciální funkci o základu a, $0 < a \neq 1$, kterážto je prostá, nazýváme **logaritmem o základu** a a značíme $\log_a$. Definičním oborem exponenciální funkce bylo celé $\mathbb{R}$ a oborem hodnot interval $(0, +\infty)$. Odtud plyne, že definičním oborem logaritmu je $D_{\log_a} = (0, +\infty)$ a oborem hodnot logaritmu je $H_{\log_a} = \mathbb{R}$.

S logaritmem se čtenář již v praxi jistě nepřímo setkal. Například Richterova stupnice (vyjadřující intenzitu otřesů) nebo decibelová škála (měřící intenzitu zvuku) jsou logaritmické.

Z vlastností exponenciály a definice logaritmu jako inverzní funkce k ní lze odvodit důležité vlastnosti logaritmu,

$$a^{\log_a x} = x, \quad x > 0, \tag{4.17}$$

$$\log_a a^x = x, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.18}$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \quad x, y > 0 \tag{4.19}$$

$$\log_a x^y = y \log_a x, \quad x > 0 \text{ a } y \in \mathbb{R}. \tag{4.20}$$

První dvě vlastnosti, (4.17) a (4.18), jsou pouze vyjádřením inverzního vztahu mezi exponenciálou a logaritmem, platí tedy definitoricky. Dokažme si vlastnost (4.19). Pro kladná x, y existují reálná u, v taková, že

$$x = a^u \quad \text{a} \quad y = a^v.$$

Odtud

$$xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v}.$$

Takže

$$\log_a xy = u + v = \log_a x + \log_a y.$$

Podobným způsobem lze dokázat vlastnost (4.20).

Poznámka 4.4: Čtenář je jistě seznámen s operací tzv. *odlogaritmování.* Tedy tvrzením, že pokud

$$\log_a x = \log_a y,$$

pro nějaká $x, y > 0$ a $0 < a \neq 1$, pak

$$x = y.$$

Tato operace není nijak magická. Jde pouze o využití prostoty funkce $\log_a$. Stejná úprava je korektní pro libovolnou prostou funkci (v případě prosté funkce f je totiž rovnost obrazů $f(x) = f(y)$ ekvivalentní rovnosti vzorů $x = y$)!

Otázka 4.13: Jaký je definiční obor funkce $f(x) = \log_a(x^2)$?

Otázka 4.14: Dokažte vzorec (4.20).

Soustřeďme se nyní na pár okamžiku na přirozený logaritmus, podobné úvahy platí ale i obecně. Zajímavou vlastností logaritmu ln je jeho pomalý růst. Až budete později během studia zkoumat efektivitu algoritmů, tak budete rádi, když získáte ve vyjádření „složitosti“ logaritmus. Typicky například běh programu v závislosti na velikosti vstupu N popsaný funkcí N^2 je výrazně pomalejší (a tedy pro nás i horší) než ten popsaný funkcí $N \ln N$.

Uvedenou pomalost lze pěkně vidět ve vztahu (4.20). Vemte si opět přirozený logaritmus ln a zvolte například $x = 1\,000\,000 = 10^6$, pokusné velké číslo. Pro funkční hodnotu ale platí $\ln(10^6) = 6 \cdot \ln(10)$, tj. exponent se převádí pouze na násobení logaritmem základu (zde cca 2.3; srovnejte to s kvadratickou funkcí x^2, která při tomto experimentu skočí do astronomických čísel $(10^6)^2 = 10^{12}$).

5 Analytická geometrie

Bez znalosti geometrie sem nikdo nevstupuj.

Údajný nápis na vstupu do Platónovy Akademie

5.1 Základní pojmy

Připomeňme, jak lze pomocí rovnic a funkcí popisovat geometrické objekty v rovině. Poprvé jsme se tohoto tématu dotkli v okamžiku, kdy jsme začali uvažovat o grafu funkce (viz rovnici (4.3)). Tento přístup ke geometrii je velmi užitečný a nachází řadu uplatnění ve fyzice a aplikované matematice. Pro naše FIT účely snad jen zdůrazněme, že výstupní periferie drtivého množství elektronických zařízení jsou v podstatě dvourozměrné (monitory, papír, projektory atd.) a jakákoliv práce s počítačovou grafikou stojí na tomto analytickém přístupu ke geometrii.

Bod

Uvažme v rovině pravoúhlý souřadný systém s osami x, y a počátkem[1] O. **Bod** v této rovině je popsán dvěma čísly nazývanými **souřadnice bodu**. Vyzývám čtenáře, aby se nad tímto krátkým konstatováním na chvilku zamyslel. Ve skutečnosti jde o klíčovou a velmi mocnou myšlenku. Idealizovaný *bod* (geometrický objekt) popisujeme pomocí *dvojice čísel* (čistě abstraktní konstrukt). V podstatě provádíme „digitalizaci geometrie“, bez slovíček cizího původu bychom mohli mluvit o jakémsi „zčíselnění“.

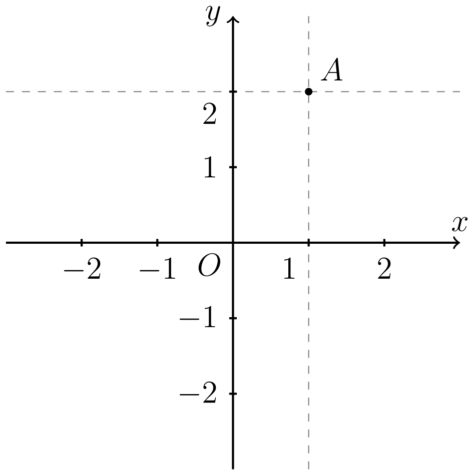
Má-li například bod A souřadnice $(1, 2)$, píšeme[2] $A = (1, 2)$, případně lze použít i hranaté závorky, $A = [1, 2]$. Bod A leží na průsečíku přímky rovnoběžné s osou y procházející bodem $(1, 0)$, tj. přímky s rovnicí $x = 1$, a přímky rovnoběžné s osou x procházející bodem $(0, 2)$, tj. přímky s rovnicí $y = 2$. Podrobně je tato situace znázorněna na obrázku č. 5.1.

Z Pythagorovy věty snadno odvodíme vzdálenost dvou bodů $A = (A_1, A_2)$ a $B = (B_1, B_2)$. Tuto vzdálenost nazýváme **Euklidovskou vzdáleností** a značíme ji $|AB|$, nebo $\operatorname{dist}(A, B)$. Platí

$$|AB| = \sqrt{(A_1 - B_1)^2 + (A_2 - B_2)^2}.$$

[1] Zde jde o velké písmenko O, ne o nulu (0). Máme na mysli *origin*.

[2] Značení souřadnic bodu pomocí výrazů typu $A[1, 2]$ nepoužíváme. Toto značení ve čtenáři spíše evokuje pocit, že A je jakási funkce dvou proměnných. Navíc je tento zápis nebezpečně podobný syntaxi pro volání funkce v Mathematica. A navíc v něm chybí sloveso.



Obrázek 5.1: Provoúhlý souřadný systém a bod $A = (1, 2)$.

Analytický popis geometrických objektů v rovině

Jakmile jsme schopni body v rovině popisovat pomocí čísel, můžeme se pokusit množiny bodů v rovině *popsat pomocí podmínek nakladených na jejich souřadnice*.

Vezměme nejprve velmi jednoduchý, konkrétní a čtenáři jistě známý příklad přímky. Když nám někdo řekne, že máme přímku zadanou rovnicí $y = 2x + 1$, pak tím vlastně říká, že v naší rovině $\mathbb{R}^2$ ho zajímá *množina bodů*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x + 1\}, \tag{5.1}$$

tedy v tomto případě graf lineární funkce $f(x) = 2x + 1$. Slovně, v rovnici (5.1) jde o množinu všech bodů se souřadnicemi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, které splňují rovnost $y = 2x + 1$. Bod o souřadnicích $(1, 1)$ do této množiny nepatří (neleží na této přímce), protože po dosazení do naší podmínky dostaneme rovnost $1 = 3$, která neplatí. Naopak bod $(1, 3)$ do naší množiny patří (na této přímce leží), protože po dosazení do dané rovnice dostaneme rovnost $3 = 3$, která je pravdivá.

Připomeňme **graf** libovolné funkce $f : A \to \mathbb{R}$ je přesně množina bodů

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A \text{ a } y = f(x)\}$$

Tento přístup lze dále zobecnit. Pomocí funkcí samotných bychom snadno nepopsali další jednoduché geometrické objekty (jako například kružnice – na to bychom potřebovali funkce dvě). Můžeme uvažovat množiny tvaru

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\},$$

kde $F(x, y)$ je zadaný výraz ve dvou proměnných x, y. Například kružnici se středem v bodě $(0, 0)$ a poloměrem 2 lze popsat rovnicí $x^2 + y^2 = 4$, formálně tedy jde o množinu

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}.$$

Další možné zobecnění spočívá v přechodu od rovnic k nerovnicím. Díky tomu můžeme popisovat i další typy objektů jako například pravá polorovina ($x \geq 0$), kruh se středem v bodě $(0, 0)$ a poloměrem 2 ($x^2 + y^2 \leq 4$).

Tento popis částí roviny bychom mohli nazvat *implicitní*. To z toho důvodu, že souřadnice bodů do popisovaného útvaru patřících ihned neznáme, musíme je nalézt. Body v rovině bychom ale mohli popisovat i *explicitně* následujícím způsobem

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in J,\ x = f(t) \text{ a } y = g(t)\},$$

kde J je zadaný interval a f, g zadané funkce. Proměnnou t většinou nazýváme parametrem. Říkáme, že jsme množinu M „parametrizovali". K nalezení bodů patřících do množiny M prostě stačí příslušná $t \in J$ dosazovat do f a g a konstruovat tak body množiny M.

Ukažme si tento přístup opět na kružnici o poloměru 2 se středem v bodě $(0,0)$:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \langle 0, 2\pi),\ x = 2\cos t \text{ a } y = 2\sin t\}.$$

Na levé straně této rovnosti máme tuto kružnici popsanou implicitně, na pravé explicitně.

Každý z těchto přístupů má různé výhody a nevýhody. Řadu základních geometrických objektů (viz dále) lze popsat oběma způsoby. Explicitní popis se hodí, když chceme daný útvar vizualizovat pomocí počítače. Implicitní tvar je zase výrazně efektivnější pro zjišťování, zda daný bod do daného útvaru patří, nebo ne. V praxi se často používá obou přístupů, nejde jeden zahodit na úkor druhého.

Vektor

Dalším důležitým geometrickým objektem je **vektor**. Vektory jsou z počátku často označovány malým písmenem se šipkou, např. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Tato notace však z dobrých důvodů velmi rychle vezme za své, zde se jí ale zatím ještě budeme držet. Vektor chápeme jako dvojici čísel[3] udávající směr; je-li dán vektor $\vec{a} = (a_1, a_2)$, pak čísla a_1 a a_2 nazýváme **složkami vektoru** $\vec{a}$. Vektory můžeme násobit číslem a sčítat podle předpisů

$$\alpha \cdot (a_1, a_2) := (\alpha a_1, \alpha a_2), \quad (a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2). \tag{5.2}$$

O operacích násobení číslem a sčítání vektorů zavedených v (5.2) se někdy ze zřejmých důvodů říká, že působí „po složkách". Rovnost mezi vektory je definována intuitivně. Řekneme, že dva vektory $\vec{a} = (a_1, a_2)$ a $\vec{b} = (b_1, b_2)$ jsou si rovny, právě když se jejich složky rovnají, tedy když $a_1 = b_1$ a $a_2 = b_2$. Tuto rovnost pak přirozeně zapisujeme jako $\vec{a} = \vec{b}$. Geometrická interpretace operací násobení číslem a sčítání vektorů je znázorněna na obrázku č. 5.2.

Vektor můžeme násobit číslem. Můžeme násobit dva vektory mezi sebou? K tomuto účelu slouží **skalární součin**[4]. Standardní[5] skalární součin dvou vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2)$ a $\vec{b} = (b_1, b_2)$ je definován předpisem

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

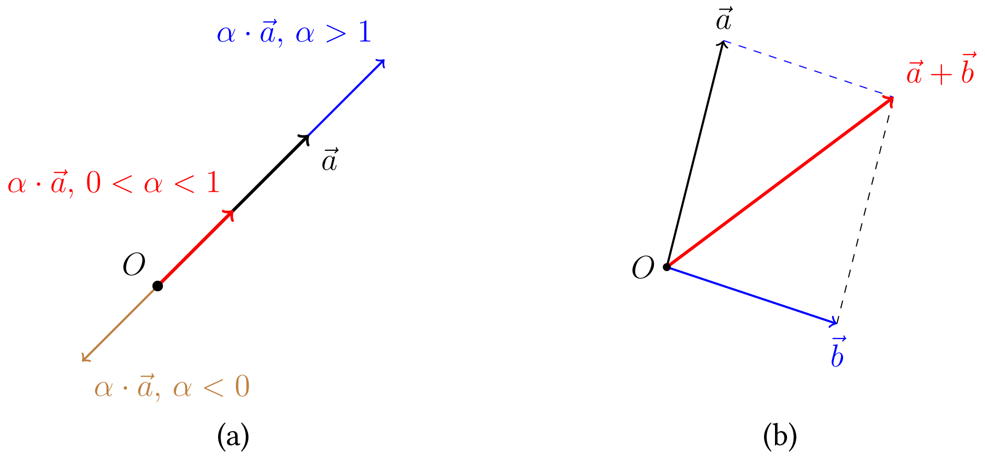
Součin se nazývá *skalární*, protože jeho výsledkem není vektor, ale číslo (skalár). Skalární součin dále souvisí s úhlem mezi vektory. Dva vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ svírají úhel $\alpha \in \langle 0, \pi)$, právě když

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}.$$

[3]Budeme stále používat řádkový zápis, i když korektnější by bylo psát vektory do sloupců. Více na toto téma se dozvíte v BI-LA1.

[4]Jistě víte, že existuje i tzv. *vektorový součin*, který dvojici trojrozměrných vektorů přiřadí další trojrozměrný vektor. Tato kapitola se ale týká pouze rovinných objektů a proto se zde o této operaci nebudeme podrobněji zmiňovat.

[5]Skalárních součinů existují vícero, dokonce nekonečně mnoho. Více se o této problematice dozvíte v BI-LA2.



Obrázek 5.2: Geometrický význam násobení vektoru číslem (a) a sčítání vektorů (b).

Délka vektoru $\vec{a} = (a_1, a_2)$ je opět dána pomocí Pythagorovy věty. Značíme ji $\|\vec{a}\|$ a platí

$$\|\vec{a}\| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{pro } \vec{a} = (a_1, a_2).$$

Všimněme si, že tuto „Euklidovskou“ délku lze vyjádřit pomocí standardního skalárního součinu jako $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

Těmito a dalšími geometrickými objekty se budete podrobněji zabývat v předmětu BI-LA1 a BI-LA2, a to nejen ve dvou dimenzích.

5.2 Přímka

Nejjednodušším geometrickým útvarem (mimo bod samotný) je **přímka**. K úplnému popsání přímky p stačí zadat bod $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{R}^2$, kterým přímka prochází, a směr, ve kterém přímka běží, tedy nenulový vektor $\vec{a} = (a_1, a_2)$. Přímka p je pak tvořena všemi body se souřadnicemi

$$(x, y) = A + t \cdot \vec{a}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5.3}$$

případně po složkách

$$\begin{aligned} x &= A_1 + ta_1, \\ y &= A_2 + ta_2, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Číslu t se říká parametr, neboť parametrizuje body na přímce. Všimněme si, že omezíme-li množinu, ze které bereme hodnoty t, dostaneme pouze části přímky. Například pro $t \in \langle 0, +\infty)$ dostáváme polopřímku začínající v bodě A a mířící ve směru $\vec{a}$, zatímco pro $t \in \langle 0, 1 \rangle$ dostaneme úsečku spojující body A a $A + \vec{a}$. Tento explicitní způsob zadání přímky, tj. pomocí rovnice (5.3), se často nazývá **parametrické vyjádření přímky** (dle dříve zmíněného jde o explicitní vyjádření).

Zmiňme nyní alternativní implicitní způsob popisu přímky. Přímka je tvořena všemi body se souřadnicemi (x, y), které splňují **rovnici přímky**

$$ax + by + c = 0. \tag{5.4}$$

Konstanty a, b, c jsou parametry dané přímky. V rovnici (5.4) vystupují symboly x a y jako neznámé. Bod (α, β) na zadané přímce leží, právě když po dosazení α za x a β za y do (5.4) dostaneme pravdivou rovnost $(0 = 0)$. Rozeberme konkrétněji příklad přímky p zadané rovnicí

$$x - 2y + 1 = 0. \tag{5.5}$$

Bod $(1, 2)$ na přímce p neleží, protože po dosazení do (5.5) dostáváme $-2 = 0$, což není pravda. Naopak body $(-1, 0)$ a $(0, 1/2)$ po dosazení dávají $0 = 0$ a na přímce tedy leží. Dva body nám stačí k načrtnutí přímky.

V rovnici (5.4) je vektor (a, b) **normálovým vektorem**, tedy vektorem kolmým na její směrový vektor, který v tomto případě lze volit[6] například jako $(b, -a)$.

Předpokládáme, že čtenář umí přecházet od parametrického popisu přímky k její rovnici a naopak.

Otázka 5.1: Udejte rovnici přímky zadané parametricky: $(x, y) = (1, 2) + (2t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Otázka 5.2: Udejte parametrické vyjádření přímky zadané rovnicí $3x - 2y + 1 = 0$.

Otázka 5.3: Sestrojte rovnici přímky procházející body $(1, -3)$ a $(2, 4)$.

Vzdálenost bodu od přímky

Mějme přímku p popsanou rovnicí

$$p : ax + by + c = 0$$

a bod $A = (A_1, A_2)$. Pojďme použít naše geometrické a analytické schopnosti a odvoďme[7] vzorec pro **vzdálenost bodu** A **od přímky** p, ozn. pro účely této sekce jako d, který asi znáte ve tvaru

$$d = \frac{|aA_1 + bA_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{5.6}$$

V čitateli je absolutní hodnota výrazu na pravé straně rovnice přímky p, kde jsme za proměnné x a y dosadili souřadnice bodu A a v čitateli je norma (délka) normálového vektoru přímky p. Dále si všimněte, že pokud bod A na přímce p leží, pak ihned dostáváme $d = 0$. Tuto vlastnost by náš vzorec jistě měl mít.

Otázka 5.4: Může být jmenovatel ve vzorci (5.6) nulový? Pokud ano, kdy? Pokud ne, proč?

Nejprve sestrojme přímku q, která prochází bodem A a je kolmá na přímku p. To je snadné, navíc pro lepší orientaci k dispozici obrázek č. 5.3:

- normálovým vektorem přímky p je vektor $\vec{n}_p = (a, b)$, takže za normálový vektor přímky q vezmeme například vektor $\vec{n}_q := (b, -a)$, který je očividně kolmý na $\vec{n}_p$,
- dále konstantní člen v rovnici přímky q zvolíme tak, aby náš bod A na přímce ležel.

Tyto dva požadavky okamžitě, takřka bez přemýšlení, dávají rovnici příky q ve tvaru

$$q : bx - ay - bA_1 + aA_2 = 0.$$

[6] Není dán jednoznačně, stejně jako normálový vektor.

[7] V tento okamžik neklesneme na nízkou úroveň pouhého konstatování vzorečku. Buďme zvídaví, proč onen vzoreček vlastně vypadá tak jak vypadá?

Dále spočteme průnik přímky p a q, který je na obrázku č. 5.3 označen symbolem P. Neznámé souřadnice tohoto bodu P, označme je sugestivně (x, y), musí splňovat jednoduchou soustavu dvou rovnic (tj. současně ležet na přímce p i q):

$$\begin{aligned} ax + by &= -c, \\ bx - ay &= bA_1 - aA_2. \end{aligned}$$

Tuto soustavu je jednoduché vyřešit. Vynásobíme-li první rovnici a a druhou b, tak po jednoduché úpravě dostaneme

$$x = \frac{1}{a^2 + b^2}(-ac + b^2 A_1 - abA_2).$$

Podobně vynásobením první b a druhé $-a$ dostaneme

$$y = \frac{1}{a^2 + b^2}(-bc - abA_1 + a^2 A_2).$$

Hledanou vzdáleností d bodu A od přímky p je pak vzdálenost bodu A od bodu P, čili

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x - A_1)^2 + (y - A_2)^2} = \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2}\sqrt{(-ac - a^2 A_1 - abA_2)^2 + (-bc - abA_1 - b^2 A_2)^2} = \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2}\sqrt{(a^2 + b^2)(aA_1 + bA_2 + c)^2} = \\ &= \frac{|aA_1 + bA_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

První rovnost je pouze vzorec pro Euklidovskou vzdálenost dvou bodů. Následně jsme dosadili námi napočtené souřadnice x a y bodu P a vytknuli opakující se výraz $\frac{1}{a^2+b^2}$. Poté jsme provedli roznásobění a přeuspořádání členů a nakonec jsme odmocnili (opět nezapomínejte na fakt $\sqrt{z^2} = |z|$, $z \in \mathbb{R}$).

5.3 Kružnice a elipsa

Rovnici kružnice lze snadno sestavit, vzpomeneme-li si opět na **Pythagorovu větu**. Kružnice se středem v bodě $C = (c_1, c_2)$ a poloměrem $r > 0$ je množina všech bodů (x, y), jejichž vzdálenost od bodu C je rovna r. Takovouto množinu lze proto popsat rovnicí

$$\sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2} = r$$

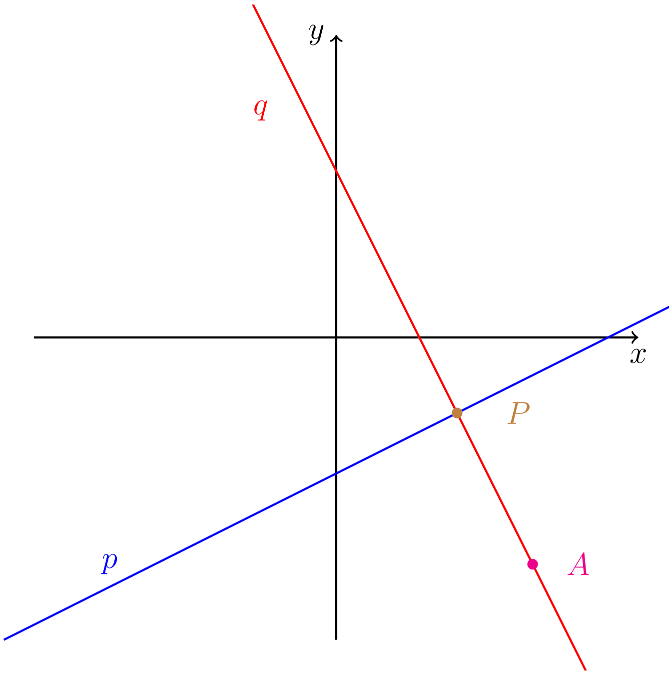
resp. ekvivalentně

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2.$$

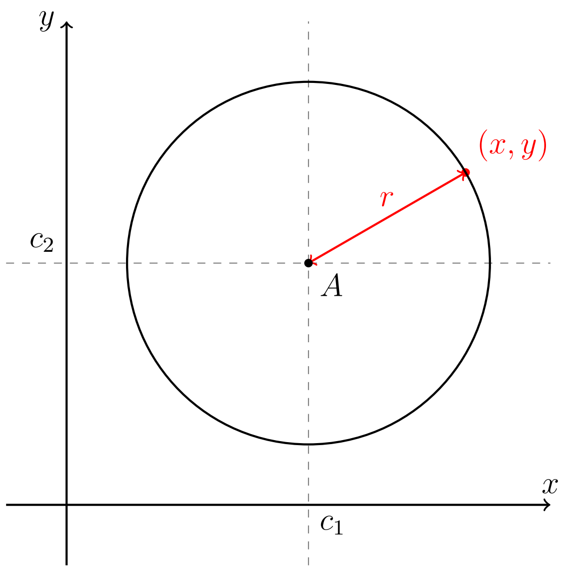
Tato situace je podrobně znázorněna na obrázku č. 5.4.

Rovnice elipsy má tvar

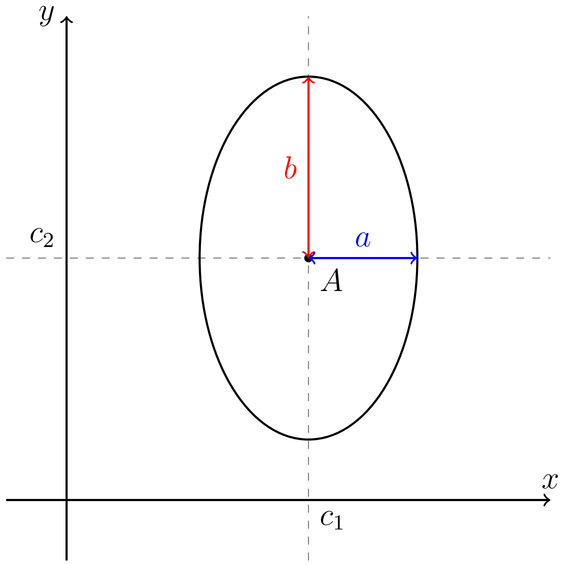
$$\frac{(x - c_1)^2}{a^2} + \frac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1, \tag{5.7}$$



Obrázek 5.3: K odvození vzorce pro vzdálnost bodu A od od přímky p.



Obrázek 5.4: Kružnice se středem v bodě $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ a poloměrem $r > 0$.



Obrázek 5.5: Elipsa se středem v bodě $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, hlavní poloosou b a vedlejší poloosou a, $0 < a < b$.

kde a a b jsou kladné parametry a $A = (c_1, c_2)$ je střed elipsy. Parametry a a b udávají délku hlavní a vedlejší poloosy. Pokud je $a = b$, dostáváme samozřejmě kružnici o poloměru a. Ilustrace typické elipsy je na obrázku č. 5.5.

Pokud chceme elipsu, resp. kružnici, explicitně vyjádřit pomocí parametrizace, stačí si vzpomenout na definici funkcí sin a cos využívající jednotkové *kružnice*.

Kružnice se středem v bodě $C = (c_1, c_2)$ a poloměrem r je množina bodů

$$\{(c_1 + r\cos t, c_2 + r\sin t) \mid t \in \langle 0, 2\pi)\}.$$

Při této volbě s parametrem t měnícím se od 0 od 2π obíháme kružnici proti směru hodinových ručiček a začínáme i končíme v bodě $(c_1 + r, c_2)$.

Podobně, pro elipsu se středem v bodě (c_1, c_2) a poloosami a, b rovnoběžnými se souřadnými osami máme vyjádření

$$\{(c_1 + a\cos t, c_2 + b\sin t) \mid t \in \langle 0, 2\pi)\}.$$

Ohniska

V případě kružnice jsme uvedli pěkné geometrické vyjádření: jde o body, která jsou od zadaného bodu (středu) stejně daleko. Existuje podobný popis i v případě elipsy? Co za geometrickou podmínku je skryto v rovnici (5.7)? Tato podkapitola se bude těmito otázkami zabývat a je v jistém smyslu bonusová. Doplňuje ale předchozí text, kde zejména rovnice (5.7) se může pozornému čtenáři zdát jako málo motivovaná.

Na otázky v předchozím odstavci lze uspokojivě odpovědět následujícím způsobem. Ukážeme, že elipsu lze popsat jako množinu bodů v rovině, *jejichž součet vzdáleností od dvou zadaných bodů $E = (E_1, E_2)$ a $F = (F_1, F_2)$ je roven předepsané hodnotě* $2a$. O bodech E a F mluvíme jako o **ohniscích** této elipsy. Zde a je kladný parametr, jehož význam odhalíme záhy, a multiplikativní faktor 2 je zvolen čistě z konvenčních důvodů. Takováto množina bodů P v rovině je popsána rovnicí

$$|EP| + |FP| = 2d. \tag{5.8}$$

Než se pustíme do rozboru této rovnice, tak si ulehčíme práci, resp. přejdeme do speciálního souřadného systému (viz obrázek č. 5.6):

- Za počátek O zvolíme bod ležící přesně uprostřed úsečky EF (mezi body E a F), tzv. střed elipsy.
- Vodorovná osa x nechť prochází body E a F.
- Svislá osa y nechť je kolmá na osu x a prochází bodem O.
- Jednotky na osách zvolme tak, že vzdálenost O od E (i F) je rovna hodnotě $c > 0$.

Zdůrazněme, že toto zjednodušení nepředstavuje újmu na obecnosti. Je to i důvod, proč se typicky ve školách zkoumají jen elipsy s poloosami rovnoběžnými se souřadnými osami. Nikdy vás nezajímalo, jestli to není moc velké omezení?

V takto zavedeném souřadném systému (viz opět obrázek č. 5.6) má bod E souřadnice $(-c, 0)$ a bode F souřadnice $(0, c)$. Rovnici (5.8) lze tak pro bod P o souřadnicích (x, y) rozepsat explicitně jako rovnici

$$\sqrt{(-c-x)^2+y^2}+\sqrt{(c-x)^2+y^2}=2a.$$

Obě strany této rovnice jsou nezáporné a proto je tato podmínka po umocnění a jednoduchých úpravách ekvivalentní podmínce

$$\sqrt{(-c-x)^2+y^2}\sqrt{(c-x)^2+y^2}=2a^2-c^2-x^2-y^2.$$

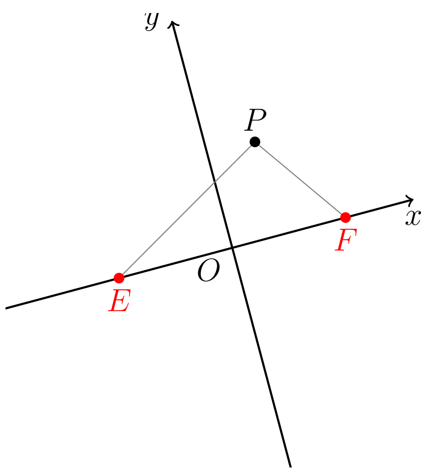
Levá strana této rovnice je nezáporná a proto aby vůbec mohla tato rovnice mít řešení, vyžadujeme $2a^2 > c^2 > 0$ a dále se zabýváme pouze těmi body (x, y) pro které platí $2a^2 - c^2 \geq x^2 + y^2$, tj. těmi uvnitř disku o poloměru $\sqrt{2a^2 - c^2}$ a středu v O. Za těchto předpokladů bude umocnění poslední rovnice stále ekvivalentní úprava a po jednoduché algebře získáme rovnici

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2),$$

resp.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1,$$

tedy rovnici elipsy se středem v bodě O a hlavní poloosou délky a a vedlejší poloosou délky $b := \sqrt{a^2 - c^2}$.



Obrázek 5.6: Elipsa s ohnisky v bodech E a F sestává ze všech bodů P jejichž vzdálenosti od bodů E a F v součtu dávají hodnotu $2a > 0$.

6 Časté problémy

Matematické předměty BI-LA1, BI-DML, BI-MA1 a BI-LA2 se přednáší na Fakultě informačních technologií v prvním ročníku a řada studentů má proto vřelý vztah k různým počítačovým algebraickým systémům (CAS), ať už se jedná o samostatné programy (Mathematica, Maple, Matlab, Sage, Maxima,...) či on-line aplikace (WolframAlpha, CoCalc). Rádi bychom na tomto místě upozornili, že ačkoliv používání těchto systémů v zásadě vítáme, mohou být jejich výstupy a chování pro uživatele nedostatečně zasvěceného do různých partií matematiky matoucí.

Namátkou zmíníme již klasické pasti.

6.1 Chytré kalkulačky jsou až moc chytré

Jak to, že $\ln(-1)$, či $\sin(\mathrm{i})$, jsou vyhodnoceny a nevracejí chybu?

Prakticky všechny elementární funkce lze rozšířit takřka na celou množinu komplexních čísel. Ano, platí $\ln(-1) = \mathrm{i}\pi$ a $\sin(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\sinh(1)$. Komplexní analýzou se však v povinných matematických předmětech z časových důvodů zabývat nemůžeme. Na přednáškách BI-MA2 však alespoň zmíníme, jak definovat e^z pro libovolné komplexní z.

Například Mathematica implicitně pracuje v „komplexním režimu". To může být pro neznalého uživatele velmi matoucí.

Jak to, že $\sqrt[3]{-1}$ je vyhodnocena jako $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ a ne jako -1?

Pokud jste zvídaví, snadno ověříte, že tento výsledek není špatný:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3 = \Bigg(\underbrace{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} - \frac{3}{4}}_{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}\Bigg) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) =$$
$$= -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -1.$$

„Problém" tkví v tom, že v komplexních číslech má úloha

$$z^3 = -1, \quad z \in \mathbb{C},$$

celkem tři řešení. To, které jsme dostali, je tzv. principiální řešení – řešení s nejmenším „argumentem".

Rovnost v CAS Mathematica

V CAS Mathematica mají různé symboly rovnosti následující význam.

- Symbol == se používá ve smyslu logické rovnosti (porovnání, zápis rovnic).
- Symbol = se používá ve smyslu přiřazení.
- Symbol := má význam „opožděného vyhodnocení“.

Demonstrujme tento rozdíl na příkladě. Výstupem tohoto kódu

```
a = 4;
b = a;
Print[b]
a = 2;
Print[b]
```

je

```
4
4
```

Naopak vyhodnocení buňky s obsahem

```
a = 4;
b := a;
Print[b]
a = 2;
Print[b]
```

má za následek výstup

```
4
2
```

6.2 Často kladené dotazy

Zde shrnujeme nejčastější dotazy, problémy a omyly, na které studenti zejména na začátku semestru narážejí a na které lze upozornit již nyní.

Na střední škole jsme to dělali/značili/nazývali jinak

To je možné a naprosto v pořádku. Neočekáváte ale přece, že všichni na celém světě budou ctít přístup, který jste na střední škole měli. Různí lidé mohou používat různé konvence a mít k tomu velmi dobré důvody.

Pokud studujete nějaký materiál, pak je rozumné se nejprve seznámit s jazykem, který tento materiál používá. Například ve studijním textu k BI-MA1 je hned na začátku uveden seznam symbolů a na konci rejstřík pojmů umožňující snadno konkrétní definice dohledat.

Jako konkrétní případ uveďme pojmy týkající se monotonie funkcí a posloupností (rostoucí, ostře rostoucí, nerostoucí aj.). Existuje několik variant tohoto názvosloví. My používáme pouze jednu, aby nedocházelo ke zmatkům. Viz přednášky a poznámky k přednáškám.

Tato poznámka se netýká jenom matematiky, platí naprosto obecně.

Inkluze

Nejen v předmětu BI-MA1 používáme pro inkluzi pouze symbol $\subset$ a nerozlišujeme mezi vlastní a nevlastní podmnožinou. Tj. inkluze $A \subset B$ platí právě tehdy, když každý prvek množiny A patří do množiny B. Speciálně pro libovolnou množinu platí $A \subset A$. V celém kurzu bez problému vystačíme s tímto jedním pojmem.

V textech, kde se mezi vlastní a nevlastní podmnožinou rozlišuje, bývá zvykem k tomu využívat i speciální značení $A \subseteq B$ a $A \subsetneq B$.

Definiční obory trigonometrických funkcí

Funkce sin, cos, tg nejsou prosté a tudíž k nim neexistují inverzní funkce. Lze je ovšem zúžit na obor, kde jsou prosté a k těmto prostým zúžením pak sestrojit inverzní funkce. Je ale nekonečně mnoho způsobů, jak tyto funkce zúžit a vyrobit tak prosté funkce. *Standardní* volba je následující

$$\begin{aligned} \arcsin &= \left(\sin \Big|_{\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle} \right)^{-1}, \\ \arccos &= \left(\cos \Big|_{\langle 0, \pi \rangle} \right)^{-1}, \\ \operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg} \Big|_{(-\pi/2, \pi/2)} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Odtud plynou následující vztahy

$$\begin{aligned} D_{\text{arcsin}} &= \langle -1, 1 \rangle, & H_{\text{arcsin}} &= \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle, \\ D_{\text{arccos}} &= \langle -1, 1 \rangle, & H_{\text{arccos}} &= \langle 0, \pi \rangle, \\ D_{\text{arctg}} &= \mathbb{R}, & H_{\text{arctg}} &= (-\pi/2, \pi/2). \end{aligned}$$

Nula na nultou

Algebraický výraz 0^0 definujeme jako 1. Nula v exponentu vyjadřuje prázdný součin (není co násobit) a výsledkem je proto neutrální prvek vůči násobení, tedy 1. Podobně u prázdné sumy je výsledkem 0, neutrální prvek vůči sčítání.

Nutná podmínka, směr implikace

Pokud platí implikace $A \Rightarrow B$, pak o B často mluvíme jako o *nutné podmínce* pro A. Pokud B neplatí, pak nutně nemůže platit A (protože kdyby A platilo, pak platí B).

7 Přehled použitého značení

Symbol	Význam
$=$	symbol rovnosti
$:=$	definiční rovnost, symbol nalevo je definován pravou stranou
$\neq$	symbol nerovnosti
$a \leq b$	a je menší nebo rovno b
$a \geq b$	a je větší nebo rovno b
$a < b$	a je menší než b
$a > b$	a je větší než b
$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$	množina přirozených čísel s 0
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$\operatorname{Re} z$	reálná část komplexního čísla z
$\operatorname{Im} z$	imaginární část komplexního čísla z
(a, b)	otevřený interval, uspořádaná dvojice nebo bod v rovině
$\langle a, b\rangle$	uzavřený interval
$A \subset B$	A je podmnožinou množiny B, připouštíme $A = B$
$A \cup B$	sjednocení množin A a B
$A \cap B$	průnik množin A a B
$A \smallsetminus B$	rozdíl množin
$A \times B$	kartézský součin množin A a B
$\|A\|$	počet prvků množiny A
$x \in A$	x je prvkem množiny A
$x \notin A$	x není prvkem množiny A
$\wedge$	konjunkce
$\vee$	disjunkce
$\Rightarrow$	implikace
$\Leftrightarrow$	ekvivalence
$\forall$	obecný kvantifikátor
$\exists$	existenční kvantifikátor
D_f nebo $D(f)$	definiční obor funkce f
H_f nebo $H(f)$	obor hodnot funkce f
e	Eulerovo číslo
π	Ludolfovo číslo

Symbol	Význam
i	imaginární jednotka
sin	funkce sinus
cos	funkce kosinus
tg	funkce tangens
cotg	funkce kotangens
arcsin	funkce arkus sinus
arccos	funkce arkus kosinus
arctg	funkce arkus tangens
$\log_a$	logaritmus o základu a, $0 < a \neq 1$
ln	přirozený logaritmus, tj. $\log_{\mathrm{e}}$
log	dekadický logaritmus, tj. $\log_{10}$
$\lfloor x \rfloor$	dolní celá část reálného čísla x
$\lceil x \rceil$	horní celá část reálného čísla x
$\lvert x \rvert$	absolutní hodnota čísla x
$n!$	faktoriál čísla n
$\binom{n}{k}$	kombinační číslo

V následující tabulce jsou uvedena často používaná řecká písmena i s jejich přibližnou českou výslovností.

Řecké písmeno	Kapitálka	Česká výslovnost	LaTeX
α		alfa	alpha
β		beta	beta
γ	Γ	gama	gamma
δ	Δ	delta	delta
ϵ		epsilon	epsilon
ζ		zeta	zeta
η		éta	eta
θ	Θ	théta	theta
κ		kapa	kappa
λ	Λ	lambda	lambda
μ		mí	mu
ν		ný	nu
ξ	Ξ	ksí	xi
π	Π	pí	pi
ρ		ró	rho
σ	Σ	sigma	sigma
τ		tau	tau
φ	Φ	fí	varphi
χ		chí	chi
ψ	Ψ	psí	psi
ω	Ω	omega	omega

Odpovědi na některé otázky

2.1 Racionální jsou $\frac{3}{4}$ a $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, protože je lze napsat jako podíl celých čísel, přesně dle definice. Iracionální jsou $\frac{\pi}{2}$ a $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ protože víme, že π a $\sqrt{2}$ jsou iracionální čísla.

2.2 1. soudělná (obě dělí 7), 2. ani nesoudělná, ani soudělná, nejedná se o dvojici celých čísel, 3. nesoudělná (obě jsou prvočísla).

2.3 $\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2$. Tento vztah laskavý čtenář snadno dokáže pomocí matematické indukce.

3.1 Popořadě $A \setminus B = (1,2)$ a $B \setminus A = \langle 3, 4)$

3.2 Obě $m \cdot n$.

3.3 Z rovnosti ijk $= -1$ vynásobením k zprava plyne $-$ij $= -k$ a tedy ij $= k$. Podobně z rovnosti ijk $= -1$ vynásobením postupně i zleva a poté i j zleva získáme $-$k $=$ ji.

3.4 a) $\operatorname{Re} z = 10$, $\operatorname{Im} z = -5$, b) $\operatorname{Re} z = 3$, $\operatorname{Im} z = -4$, c) $\operatorname{Re} z = -1$, $\operatorname{Im} z = 1$, d) $\operatorname{Re} z = \frac{2}{5}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{1}{5}$.

3.5 a) omezená, b) pouze zdola omezená, c) není zdola ani shora omezená, d) omezená.

3.6 a) $\min A = -1$, $\max A = 3$, b) nemá minimum, $\max B = a$, c) $\min C = -1$, $\max C = 1$, d) $\min D = -1$, nemá maximum, e) nemá maximum ani minimum.

3.7 Nemá. Aby tato otázka měla naději na úspěch, musela by tato množina mít nějaký prvek.

3.8 Není. Číslo 2 je sudé a je prvočíslem.

3.9 Ano, v případě $q = 1$ platí $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = n$.

3.10 $5, -6$.

3.11 Ani jeden ze zápisů není jednoznačný.

4.1 Tvrzení není pravdivé, uvažte libovolné záporné číslo x. Pro všechna reálná x platí $\sqrt{x^2} = |x|$.

4.2 Není. Například libovolná přímka rovnoběžná s osou y není grafem žádné funkce, tedy ani funkce tvaru $y = ax + b$ s reálnými a, b.

4.3 Ne. Lineární funkce $f(x) = 0$ splývá s osou x a průsečíků s ní je tedy nekonečně mnoho.

4.4 $\varphi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

4.5 1. ne, 2. ano, 3. ano, 4. ano.

4.6 1. 3 a -4, 2. 1, -2 a 3, 3. -2 a 2.

4.7 Označíme-li kořeny jako $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pak roznásobením faktorizace polynomu na kořenové činitele dostáváme $a_0 = (-1)^n x_1 x_2 \cdots x_n$.

4.8 Označíme-li si příslušné kořeny x_1, x_2, x_3, pak roznásobením $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ a porovnáním koeficientů získáme $-a_2 = x_1 + x_2 + x_3$, $a_1 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$ a $a_0 = -x_1x_2x_3$.

4.11 1. $\frac{\pi}{4}$, 2. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4.13 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pozor, tato funkce není totožná s funkcí $h(x) = 2\log_a(x)$.

5.1 $x + 2y - 5 = 0$.

5.2 $(x, y) = (-1, -1) + t \cdot (2, 3)$.

5.3 $7x - y - 10 = 0$.

5.4 Nulový být nemůže, v tom případě by odpovídající rovnice byla tvaru $c = 0$, což v rovině představuje buď prázdnou množinu, nebo celou rovinu. Ani v jednom případě nejde o přímku.

Literatura

[1] Hans-Jochen Bartsch. *Matematické vzorce.* Mladá fronta, 2000.

[2] Berry A. Cipra. The best of the 20th century: Editors name top 10 algorithms. *SIAM News*, 33(4).

[3] Confuted. Using quaternion to perform 3d rotations.

[4] Keith Devlin. *The Man of Numbers.* Bloomsbury, 2011.

[5] Nist digital library of mathematical functions. http://dlmf.nist.gov/, Release 1.0.15 of 2017-06-01. F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller and B. V. Saunders, eds.

[6] IEEE. Ieee standard for floating-point arithmetic, 2008.

[7] Aleš Vlk, Jakub Drbohlav, Tomáš Fliegl, Vladimír Hulík, Šimon Stiburek, and Václav Švec. *Studijní neúspěšnost na vysokých školách: Teoretická východiska, empirické poznatky a doporučení.* SLON, 2017.

[8] Eric Weisstein. Euler–mascheroni constant.

[9] Eric W. Weisstein. Decreasing function.

Index