

4 Prahové a majoritní funkce

Tato kapitola trochu vybočuje z logiky sledu jednotlivých odstavců v tomto textu. Celá by se hodila např. do kap.2, ale pro usnadnění práce s algebraickými výrazy a pro možné využití prahových a majoritních funkcí v dalším textu je zařazena právě na toto místo.

Prahová funkce $F_n^k(v_1a_1, v_2a_2, \dots, v_ma_m)$ nabývá hodnoty logické 1, jestliže algebraický součet vah (v_i je celé číslo) nezávisle proměnných ($a_i \in B$), které nabývají v daném okamžiku hodnoty logické 1, je větší nebo roven prahu k :

$$F_n^k = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m v_i a_i \geq k$$

kde n je řád prahové funkce a je roven algebraickému součtu všech vah:

$$n = \sum_{i=1}^m v_i$$

Souměrná prahová funkce je taková prahová funkce, kde všechny proměnné mají shodnou váhu. Zvláštním případem souměrné prahové funkce je funkce majoritní.

Majoritní funkce je souměrná prahová funkce lichého řádu n ($n \geq 3$) s prahem $k = \frac{n+1}{2}$. Jinými slovy majoritní funkce nabývá hodnoty logické jedničky, jestliže nadpoloviční většina nezávisle proměnných nabývá hodnoty logické 1. Pro majoritní funkce obvykle označované M_n platí některá jednoduchá snadno odvoditelná pravidla:

$$M_3(a, b, 1) = a + b$$

$$M_3(a, b, 0) = a \cdot b$$

$$M_3(a, b, a) = a$$

$$M_3(a, b, \bar{a}) = b$$

$$\overline{M_3(a, b, c)} = M_3(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \text{ (de Morganův zákon pro majority)}$$

Někdy je potřebné zabývat se i opačnou úlohou - vyjádřit logickou funkci určenou algebraickým výrazem pomocí majority. Pomůckou je tzv. *transformační věta* : funkci f rozložíme do následujícího tvaru:

$$f = f_0(f_1 + f_2) + \bar{f}_0(f_3 \cdot f_4)$$

potom

$$f = M_3(f_0, f_0 f_1 + \bar{f}_0 f_3, f_0 f_2 + \bar{f}_0 f_4)$$

4.1 Cvičení

1. Nalezněte MNDF prahové funkce $F_5^2(a, 2b, 2c)$.

Řešení

Výsledek lze snadno nalézt logickou úvahou, ale ukážeme si i názorný postup pomocí pravdivostní tabulky (Tab. 4.1). Výsledek dostaneme ze sloupce F známým způsobem (např pomocí mapy):
 $F_5^2 = b + c$

a	b	c	$\sum v_i a_i$	F
0	0	0	0	0
0	0	1	2	1
0	1	0	2	1
0	1	1	4	1
1	0	0	1	0
1	0	1	3	1
1	1	0	3	1
1	1	1	5	1

Tab. 4.1 Pravdivostní tabulka prahové funkce $F(a, b, c)$

2. Nalezněte MNDF prahové funkce $F_7^4(a, 2b, 3c)$. Dopočítejte řád.

3. Nalezněte MNDF prahových funkcí pro prahy $k = 1, 2, 3, \dots$. Spočítejte řády.

a) $F_7^2(a, 2b, 2c)$

b) $F(a, 2b, 3c, d)$

c) $F(a, b, c)$

d) $F(a, b, c, d)$

e) $F(2a, b, -c, 3d)$

Řešení

Váha proměnné de facto znamená, jakou měrou se proměnná uplatní na výstupu (bude-li jedničková). Může se uplatnit zeslabujícím způsobem, což lze vyjádřit zápornou váhou. Při řešení postupujeme stejně jako pro proměnné s kladnými vahami. Intuitivní řešení může být o něco těžší, ve výsledku se mohou vyskytovat negované proměnné. V našem příkladu (předpokládejme např., že hledáme řešení pro $k = 2$) nestačí pro splnění funkce, aby byla pouze proměnná a jedničková (v MNDF funkce se nemůže vyskytovat term a , ale je třeba zároveň zajistit, aby $c \neq 1$ (tedy term $a\bar{c}$):

$$F_5^2(2a, b, -c, 3d) = a\bar{c} + ab + d$$

f) $F(a, -b, c)$

g) $F(a, b, 5c, -3d)$

4. Nalezněte a pojmenujte všechny souměrné prahové funkce třech proměnných. (Nechť práh $k = 0, 1, 2, \dots$).

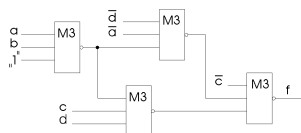
5. Dokažte, že platí :

$$\begin{aligned}
 M_3(a, b, \bar{a}) &= b \\
 \overline{M_3(a, b, c)} &= M_3(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \\
 M_3(a, b, M_3(c, d, a)) &= M_3(a, b, M_3(c, d, \bar{b})) \\
 M_3(\bar{a}, M_3(b, c, a), M_3(b, d, a)) &= M_3(b, a, M_3(c, d, \bar{a}))
 \end{aligned}$$

6. Nalezněte MNDF funkcí vyjádřených jako majority:

- $M_3(0, 1, M_3(a, b, 0))$
- $M_3(0, 1, M_3(a, b, 1))$
- $M_3(M_3(a, b, \bar{a}), M_3(a, \bar{b}, 0), 1)$
- $M_3(M_3(a, b, \bar{a}), M_3(a, \bar{b}, 0), 0)$
- $M_3(M_3(a, b, \bar{a}), M_3(a, b, \bar{b}), M_3(a, a, b))$
- $M_5(M_3(\overline{ab}, c, de), M_3(\overline{a+b}, 1, \bar{d}), \overline{cd}, a, \bar{c})$
- $M_5(M_3(a, \bar{a}, 0), 1, M_3(a, b, 0), M_5(0, 1, a, \bar{a}, b), a)$
- $M_7(a, b, c, 0, 1, M_3(a, \bar{b}, \bar{c}), \bar{a})$
- $M_3(M_3(a, b, c), M_3(a, \bar{a}, b), c)$
- $M_5(a, b, \bar{c}, 0, M_3(a, \bar{a}, b))$
- $M_5(a, 1, M_3(0, \bar{a}, \bar{b}), \overline{a+b}, ab)$

7. Vyjádřete funkci f z obr.4.1 v MNDF i v MNKF. Jednotlivé bloky realizují funkci M_3 .



Obr. 4.1 Realizace funkce f pomocí bloků majorit

8. Následující funkce vyjádřete pomocí M_3 :

a) $f = (a + b)(c + \bar{b}\bar{d}) + \bar{a}\bar{b}c\bar{d}$

Řešení

Použijeme transformační větu. Funkce f_0 až f_4 zvolíme např. takto:

$$f_0 = a + b$$

$$f_1 = c$$

$$f_2 = \bar{b}\bar{d}$$

$$f_3 = c$$

$$f_4 = \bar{d}$$

Potom $\bar{f}_0 = \bar{a}\bar{b}$ a můžeme dosadit podle transformační věty:

$$f = M_3(a + b, (a + b)c + \bar{a}\bar{b}c, (a + b)\bar{b}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{d})$$

což je po úpravách podle zákonů Booleovy algebry

$$f = M_3(a + b, c, \bar{b}\bar{d})$$

b) $f = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}\bar{c}$

c) $\bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c}$

d) $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$