Volby a volební systémy (NI-VOL), Přednáška č. 1

Volby a přehled volebních pravidel

Dušan Knop

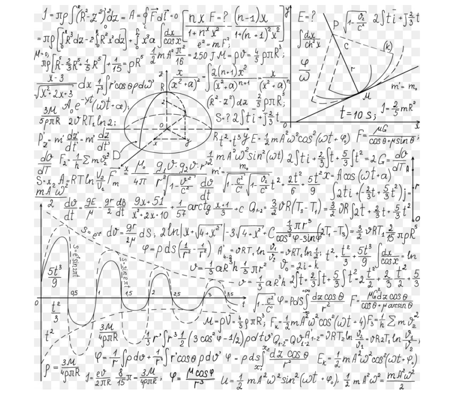
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze
`https://courses.fit.cvut.cz/NI-VOL/`

LS 2024/2025,

(Verze dokumentu: 18. 3. 2025 10:30)

Volby – To znám!

Volby – To znám!



Volby

Definice

Volby jsou uspořádaná dvojice $\mathcal{E} = (C, V)$, kde

- C je konečná množina **kandidátů (alternativ)**, $|C| = m \geq 2$ a
- V je konečná a neprázdná množina **voličů (agentů)**, $|V| = n$.

Definice

Každý volič $v \in V$ vyjadřuje své preference p_v.

Schvalovací preference volič schvaluje (vyjadřuje podporu) množině alternativ $p_v \subseteq C$

Ordinální preference p_v je lineární uspořádání na C; píšeme $a \succeq_v b$ pokud volič v shledává alternativu a striktně preferovanou či shodnou s alternativou b.

Množinu všech lineárních uspořádání na množině C značíme $\mathcal{L}(C)$.
Profil preferencí $\mathscr{P} = (p_{v_1}, \ldots, p_{v_n})$ plně charakterizuje volby $\mathcal{E}$.

Volby – Profil

Definice

Každý volič $v \in V$ vyjadřuje své preference p_v.

Schvalovací preference volič schvaluje (vyjadřuje podporu) množině alternativ $p_v \subseteq C$

Ordinální preference p_v je lineární uspořádání na C; píšeme $a \succeq_v b$ pokud volič v shledává alternativu a striktně preferovanou či shodnou s alternativou b.

Příklad (Schvalovací preference)

- Máme množinu kandidátů $C = \{a, b, c, d\}$.
- Volič může schválit více kandidátů $p_v = \{a, c\}$.

Interpretace: Volič schvaluje kandidáty a a c, ale nevyjadřuje žádné preference mezi nimi. Naopak kandidáty b a d neschvaluje.

Definice

Každý volič $v \in V$ vyjadřuje své preference p_v.

Schvalovací preference volič schvaluje (vyjadřuje podporu) množině alternativ $p_v \subseteq C$

Ordinální preference p_v je lineární uspořádání na C; píšeme $a \succeq_v b$ pokud volič v shledává alternativu a striktně preferovanou či shodnou s alternativou b.

Příklad (Ordinální preference)

- Máme množinu kandidátů $C = \{a, b, c, d\}$.
- Volič v má preference $a \succ b \succ c \succ d$.

Interpretace:

- Volič v se domnívá, že alternativa a je nejlepší možná. Dále v pořadí b, c, d.
- Pozor, nevyjadřuje „jak moc“ by byl spokojený či nespokojený s alternativou b oproti a.

Volby – Jak vybrat toho nejlepšího?

Soustředíme se na

Volby vítěze(ů) Cílem je naleznout neprázdnou množinu vítězných alternativ $W \subseteq C$. Ideálně samosebou $|W| = 1$.

Volby komisí Cílem je naleznout množinu k-prvkových množin vítězných alternativ $W \subseteq \binom{C}{k}$ (pro fixní k).

Definice

Nechť jsou (C, V) dány. **Volební pravidlo** je funkce

$$f\colon \mathcal{L}(C)^V \to 2^C \setminus \emptyset\,.$$

Definice

Nechť jsou (C, V) dány. **Funkce společenské volby** (social choice function) je funkce

$$f\colon \mathcal{L}(C)^V \to \mathcal{L}(C)\,.$$

První (ne)volební pravidlo – Diktátorství

Definice (Diktátorství)

Nechť (C, V) je instance voleb a $d \in V$ je některý z voličů. Volební pravidlo `Dictatorship` vzhledem k voliči d je definováno jako

$$\texttt{Dictatorship}_d(\mathscr{P}) = \{c \in C \mid \operatorname{rank}(c, p_d) = 1\}.$$

Jinými slovy, pravidlo určí vítěze na základě profilu voliče d (kterému se proto říká **diktátor**) a zcela ignoruje preference ostatních voličů.

Příklad. Mějme $C = \{a, b, c\}$ a množinu voličů $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ s následujícími preferencemi:

$$p_{v_1} : a \succ b \succ c \qquad p_{v_2} : b \succ c \succ a \qquad p_{v_3} : b \succ c \succ a.$$

Volební pravidlo $\texttt{Dictatorship}_{v_1}$ určí za vítěze kandidáta a. A to i přes to, že z pohledu ostatních voličů se jedná o nejhorší volbu.

Většinová volba

Definice

Top-skóre kandidáta $c \in C$, značíme $\mathrm{score}_\top(c)$, je definováno jako

$$\mathrm{score}_\top(c) = \left|\{v \in V \mid \mathrm{rank}(c, p_v) = 1\}\right| .$$

Definice (Absolutní většina)

Nechť (C, V) je instance voleb. Volební pravidlo `Majority` je definováno jako

$$\mathtt{Majority}(\mathscr{P}) = \{c \in C \mid \mathrm{score}_\top(c) > \sum_{d \in C \setminus \{c\}} \mathrm{score}_\top(d)\}.$$

Jedná se o volební pravidlo dle definice?

Většinová volba – znovu a lépe

Definice (Relativní většina)

Nechť (C, V) je instance voleb. Volební pravidlo `Plurality` je definováno jako

$$\texttt{Plurality}(\mathscr{P}) = \arg\max_{c \in C} \mathrm{score}_{\top}(c).$$

`Plurality` tedy vždy volí za vítěze kandidáty s maximálním skóre.

Příklad: Mějme $C = \{a, b, c\}$ a množinu voličů $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ s následujícími preferencemi:

$$p_{v_1} : a \succ b \succ c \qquad p_{v_2} : b \succ c \succ a \qquad p_{v_3} : b \succ c \succ a.$$

Platí, že $\mathrm{score}_{\top}(a) = 1$, $\mathrm{score}_{\top}(b) = 2$ a $\mathrm{score}_{\top}(c) = 0$. `Plurality` tedy za vítěze zvolí kandidáta b.

Veto

Volební pravidla se většinou snaží nějak reflektovat přání voličů. Zatímco `Plurality` maximalizuje počet voličů, kteří jsou s volbou velmi šťastní, následující pravidlo se spíše snaží o volbu nejméně neoblíbených kandidátů – tedy udělat co nejméně voličů nešťastných.

Definice

Bottom-skóre kandidáta $c \in C$, značíme $\mathrm{score}_\perp(c)$, je definováno jako

$$\mathrm{score}_\perp(c) = |\{v \in V \mid \mathrm{rank}(c, p_v) = |C|\}| .$$

Veto (pokračování)

Definice (Veto)

Nechť (C, V) je instance voleb. Volební pravidlo `Veto` je definováno jako

$$\texttt{Veto}(\mathscr{P}) = \arg\min_{c \in C} \mathrm{score}_{\perp}(c).$$

`Veto` tedy volí za vítěze kandidáty s nejmenším počtem výskytů na posledním místě v daném profilu preferencí.

Příklad: Mějme $C = \{a, b, c\}$ a množinu voličů $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ s následujícími preferencemi:

$$p_{v_1} : a \succ c \succ b \qquad p_{v_2} : b \succ c \succ a \qquad p_{v_3} : b \succ c \succ a.$$

Platí, že $\mathrm{score}_{\perp}(a) = 2$, $\mathrm{score}_{\perp}(b) = 1$ a $\mathrm{score}_{\perp}(c) = 0$. Volební pravidlo `Veto` tedy za vítěze zvolí kandidáta c.

k-Approval

Pravidlo `Plurality` (a v jistém smyslu slova i `Veto`) se zajímají jen o tu nejlepší alternativu každého voliče. Jelikož ale ordinální preference nezachycují absolutní rozdíl v oblíbenosti jednotlivých kandidátů, dává pro některá použití dobrý smysl uvažovat i další alternativy v pořadí.

Definice

Buď $k \in \mathbb{N}$ nějaké kladné celé číslo. Pro kandidáta $c \in C$ definujeme jeho top-k-skóre jako

$$\mathrm{score}_{\leq k}(c) = \left|\{v \in V \mid \mathrm{rank}(c, p_v) \leq k\}\right| .$$

Definice (k-Approval)

Nechť (C, V) je instance voleb a $k \in \mathbb{N}$. Volební pravidlo k-`Approval` je definováno jako

$$k\text{-}\mathtt{Approval}(\mathscr{P}) = \arg\max_{c \in C} \mathrm{score}_{\leq k}(c).$$

k-Approval (pokračování)

Příklad: Mějme $C = \{a, b, c\}$ a množinu voličů $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ s následujícími preferencemi:

$$p_{v_1}: a \succ c \succ b \qquad p_{v_2}: b \succ c \succ a \qquad p_{v_3}: b \succ c \succ a.$$

Platí, že $\mathrm{score}_{\leq 2}(a) = 1$, $\mathrm{score}_{\leq 2}(b) = 2$ a $\mathrm{score}_{\leq 2}(c) = 3$. Volební pravidlo 2-`Approval` tedy za vítěze zvolí kandidáta c.

Poznámka

1-`Approval` je `Plurality` a $(|C| - 1)$-`Approval` je `Veto`.

Skórovací protokoly

- Volební pravidlo k-`Approval` sice bere v potaz i další kandidáty, než je jen ten první v preferencích voličů, ale za cenu velkého zjednodušení:
  - všech k prvních alternativ je považováno za stejně vhodné.
- Pro jemnější rozlišení pozic kandidátů existuje celá rodina volebních pravidel, tzv. **skórovacích protokolů**.

Definice

Nerostoucí posloupnost $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_m)$ pro kterou platí, že $s_1 > s_m$ nazveme skórovací posloupností.
Pro kandidáta $c \in C$ pak definujeme jeho Σ-skóre vzhledem k $\vec{s}$ jako

$$\mathrm{score}_{\Sigma}^{\vec{s}}(c) = \sum_{v \in V} s_{\mathrm{rank}(c,p_v)}.$$

Skórovací protokoly (pokračování)

Definice (Poziční skórovací protokol)

Nechť (C, V) je instance voleb a $\vec{s} = (s_1, \dots, s_m)$ nějaká skórovací posloupnost. Volební pravidlo PSP vzhledem k $\vec{s}$ je definováno jako

$$\mathrm{PSP}_{\vec{s}}(\mathscr{P}) = \arg\max_{c \in C} \mathrm{score}_{\Sigma}^{\vec{s}}(c).$$

Poznámka

- `Plurality` je PSP se skórovací posloupností $(1, 0, \dots, 0)$.
- `Veto` je PSP se skórovací posloupností $(1, \dots, 1, 0)$.
- k-`Approval` je PSP se skórovací posloupností $(\underbrace{1, \dots, 1}_{k}, 0, \dots, 0)$.

Skórovací protokoly (pokračování)

Některé skórovací posloupnosti jsou tak významné a často používané, že mají dokonce svá vlastní jména. Pravděpodobně nejznámější je následující pravidlo.

Definice (Borda)

Volební pravidlo `Borda` je PSP se skórovací posloupností

$$\vec{s} = (m-1, m-2, m-3, \ldots, 2, 1, 0)\,.$$

Příklad: Mějme $C = \{a, b, c\}$ a množinu voličů $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ s následujícími preferencemi:

$$p_{v_1} : a \succ c \succ b \qquad p_{v_2} : b \succ c \succ a \qquad p_{v_3} : b \succ c \succ a.$$

Platí, že $\mathrm{score}_{\texttt{Borda}}(a) = 2 + 0 + 0 = 2$, $\mathrm{score}_{\texttt{Borda}}(b) = 0 + 2 + 2 = 4$ a $\mathrm{score}_{\texttt{Borda}}(c) = 1 + 1 + 1 = 3$. Volební pravidlo `Borda` tedy za vítěze zvolí kandidáta b.

Pravidla založená na porovnávání kandidátů

Definice (Condorcetův vítěz)

Pro každé dva kandidáty $c, d \in C$ definujeme

$$\mu(c,d) = |\{v \in V \mid c \succ_v d\}| - |\{v \in V \mid d \succ_v c\}|.$$

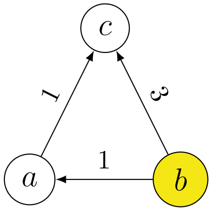
Grafem majority je potom vážený orientovaný graf $D = (C, A, \omega)$, kde A obsahuje hranu (c,d), $c,d \in C$, právě tehdy, když $\mu(c,d) \geq 0$. Pro každou hranu (c,d) nastavíme $\omega((c,d)) = \mu(c,d)$. Každý $c \in C$, který je v D zdrojem, pak nazveme **Condorcetovým vítězem**.

Příklad: $C = \{a,b,c\}$, $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ a

$p_{v_1} : a \succ b \succ c \quad p_{v_2} : b \succ a \succ c \quad p_{v_3} : b \succ c \succ a.$

Pro tuto instanci platí

$$\begin{aligned} \mu(a,b) &= 1 - 2 = -1 & \mu(a,c) &= 2 - 1 = 1 \\ \mu(b,a) &= 2 - 1 = 1 & \mu(b,c) &= 3 - 0 = 3 \\ \mu(c,a) &= 1 - 2 = -1 & \mu(c,b) &= 0 - 3 = -3 \end{aligned}$$



Condercetův cyklus

Pozorování

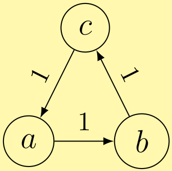
Condorcetův vítěz nemusí existovat pro každou instanci voleb.

Důkaz.

Uvažujme volby s následujícím profilem preferencí $\mathscr{P}$:

$$p_{v_1}: a \succ b \succ c \qquad p_{v_2}: c \succ a \succ b \qquad p_{v_3}: b \succ c \succ a.$$

graf majority D pro tento profil vypadá následovně:



Zjevně, graf D neobsahuje žádný zdroj, tedy ani Condercotův vítěz není pro profil $\mathscr{P}$ definován. $\square$

Copelandova metoda

Definice (Copelandova metoda)

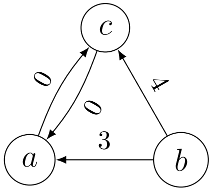
Nechť (C, V) je instance voleb, D je odpovídající graf majority a $\alpha \in [0, 1]$ je reálné číslo. Pro každého kandidáta $c \in C$ definujeme

$$\text{score}^{\alpha}_{\texttt{Copeland}}(c) = |\{d \in C \mid \mu(c, d) > 0\}| + \alpha \cdot |\{d \in C \mid \mu(c, d) = 0\}|.$$

Volební pravidlo α-`Copeland` je pak definováno jako

$$\alpha\text{-}\texttt{Copeland}(\mathscr{P}) = \arg\max_{c \in C} \text{score}^{\alpha}_{\texttt{Copeland}}(c).$$

Příklad: Nechť je graf majority pro naši instanci dle obrázku vpravo a $\alpha = 1/2$. Potom
$\text{score}^{\alpha}_{\texttt{Copeland}}(a) = 0 + 1/2 \cdot 1 = 1/2$,
$\text{score}^{\alpha}_{\texttt{Copeland}}(b) = 2 + 1/2 \cdot 0 = 2$ a
$\text{score}^{\alpha}_{\texttt{Copeland}}(c) = 0 + 1/2 \cdot 1 = 1/2$.
Za vítěze je tedy zvolen kandidát b.



Simpsonovo hlasování

Definice (Simpsonovo hlasování)

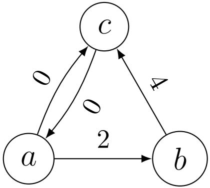
Nechť (C, V) je instance voleb a D je odpovídající graf majority. Pro každého kandidáta $c \in C$ definujeme

$$\mathrm{score}_{\texttt{Simpson}}(c) = \min \left\{ \min_{(c,d) \in A} \omega((c,d)), \min_{(d,c) \in A} -\omega((d,c)) \right\}.$$

Volební pravidlo `Simpson` (někdy též `MaxiMin`) je pak definováno jako

$$\texttt{Simpson}(\mathscr{P}) = \arg\max_{c \in C} \mathrm{score}_{\texttt{Simpson}}(c).$$

Příklad: Nechť je graf majority pro naši instanci dle obrázku vpravo. Platí $\mathrm{score}_{\texttt{Simpson}}(a) = 0$, $\mathrm{score}_{\texttt{Simpson}}(b) = -2$ a $\mathrm{score}_{\texttt{Simpson}}(c) = -4$. Za vítěze je tedy zvolen kandidát a.



Youngův systém

Definice (Youngův systém)

Nechť (C, V) jsou volby. Pro každého kandidáta $c \in C$ definujeme

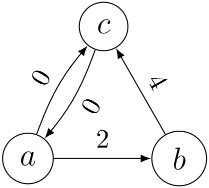
$$\mathrm{score}_{\mathtt{Young}}(c) = \min \{|R| \mid R \subseteq V \text{ a } c \text{ je Cond. vítěz v } (C, V \setminus R)\}\,.$$

Volební pravidlo $\mathtt{Young}$ je pak definováno jako

$$\mathtt{Young}(\mathscr{P}) = \arg\min_{c \in C} \mathrm{score}_{\mathtt{Young}}(c).$$

Příklad: Mějme následující profil preferencí:

$$2\times : b \succ c \succ a \quad 3\times : a \succ b \succ c \quad 1\times : c \succ a \succ b.$$



Žádný z kandidátů očividně není Condorcetovým vítězem. Platí, že $\mathrm{score}_{\mathtt{Young}}(a) = 1$: stačí odstanit hlas $c \succ a \succ b$. Pro ostatní kandidáty je třeba odstranit striktně více hlasů, jediným vítězem je tedy a.

Dodgsonova volba

Definice (Dodgsonova volba)

Nechť (C, V) jsou volby. Pro každého kandidáta $c \in C$ definujeme $\mathrm{score}_{\texttt{Dodgson}}(c)$ jako minimální počet prohození dvou sousedních kandidátů ve voličských preferencích potřebných k tomu, aby se c stal Condorcetovým vítězem. Volební pravidlo Dodgson je pak definováno jako

$$\texttt{Dodgson}(\mathscr{P}) = \arg\min_{c \in C} \mathrm{score}_{\texttt{Dodgson}}(c).$$

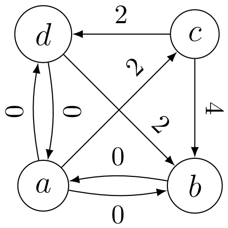
Příklad: Mějme následující profil preferencí:

$a \succ d \succ c \succ b \quad c \succ d \succ b \succ a \quad c \succ d \succ b \succ a$

$b \succ d \succ a \succ c \quad a \succ c \succ d \succ b \quad a \succ c \succ b \succ d$

Potom platí

$$\mathrm{score}_{\texttt{Dodgson}}(a) =$$



Dodgsonova volba

Definice (Dodgsonova volba)

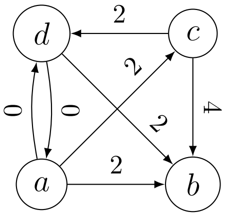
Nechť (C, V) jsou volby. Pro každého kandidáta $c \in C$ definujeme $\mathrm{score}_{\mathtt{Dodgson}}(c)$ jako minimální počet prohození dvou sousedních kandidátů ve voličských preferencích potřebných k tomu, aby se c stal Condorcetovým vítězem. Volební pravidlo Dodgson je pak definováno jako

$$\mathtt{Dodgson}(\mathscr{P}) = \arg\min_{c \in C} \mathrm{score}_{\mathtt{Dodgson}}(c).$$

Příklad: Mějme následující profil preferencí:

$$a \succ d \succ c \succ b \quad c \succ d \succ \underbrace{a \succ b}_{\leftrightarrow} \quad c \succ d \succ b \succ a$$

$$b \succ d \succ a \succ c \quad a \succ c \succ d \succ b \quad a \succ c \succ b \succ d$$



Potom platí

$$\mathrm{score}_{\mathtt{Dodgson}}(a) =$$

Dodgsonova volba

Definice (Dodgsonova volba)

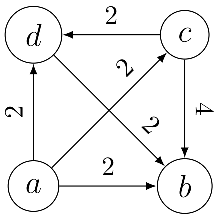
Nechť (C, V) jsou volby. Pro každého kandidáta $c \in C$ definujeme $\mathrm{score}_{\mathtt{Dodgson}}(c)$ jako minimální počet prohození dvou sousedních kandidátů ve voličských preferencích potřebných k tomu, aby se c stal Condorcetovým vítězem. Volební pravidlo Dodgson je pak definováno jako

$$\mathtt{Dodgson}(\mathscr{P}) = \arg\min_{c \in C} \mathrm{score}_{\mathtt{Dodgson}}(c).$$

Příklad: Mějme následující profil preferencí:

$a \succ d \succ c \succ b \quad c \succ \underbrace{d \succ a}_{\leftrightarrow} \succ b \quad c \succ d \succ b \succ a$

$b \succ d \succ a \succ c \quad a \succ c \succ d \succ b \quad a \succ c \succ b \succ d$



Potom platí

$$\mathrm{score}_{\mathtt{Dodgson}}(a) =$$

Dodgsonova volba

Definice (Dodgsonova volba)

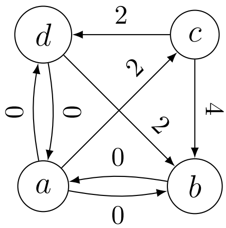
Nechť (C, V) jsou volby. Pro každého kandidáta $c \in C$ definujeme $\mathrm{score}_{\texttt{Dodgson}}(c)$ jako minimální počet prohození dvou sousedních kandidátů ve voličských preferencích potřebných k tomu, aby se c stal Condorcetovým vítězem. Volební pravidlo `Dodgson` je pak definováno jako

$$\texttt{Dodgson}(\mathscr{P}) = \arg\min_{c \in C} \mathrm{score}_{\texttt{Dodgson}}(c).$$

Příklad: Mějme následující profil preferencí:

$$a \succ d \succ c \succ b \quad c \succ \underbrace{d \succ a}_{\leftrightarrow} \succ b \quad c \succ d \succ b \succ a$$

$$b \succ d \succ a \succ c \quad a \succ c \succ d \succ b \quad a \succ c \succ b \succ d$$



Potom platí

$$\mathrm{score}_{\texttt{Dodgson}}(a) = 2$$

Dodgsonova volba

Definice (Dodgsonova volba)

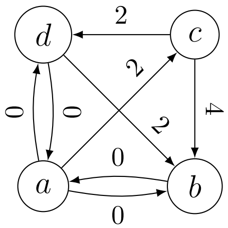
Nechť (C, V) jsou volby. Pro každého kandidáta $c \in C$ definujeme $\mathrm{score}_{\texttt{Dodgson}}(c)$ jako minimální počet prohození dvou sousedních kandidátů ve voličských preferencích potřebných k tomu, aby se c stal Condorcetovým vítězem. Volební pravidlo Dodgson je pak definováno jako

$$\texttt{Dodgson}(\mathscr{P}) = \arg\min_{c \in C} \mathrm{score}_{\texttt{Dodgson}}(c).$$

Příklad: Mějme následující profil preferencí:

$$a \succ d \succ c \succ b \quad c \succ \underbrace{d \succ a}_{\leftrightarrow} \succ b \quad c \succ d \succ b \succ a$$

$$b \succ d \succ a \succ c \quad a \succ c \succ d \succ b \quad a \succ c \succ b \succ d$$



Potom platí

$$\mathrm{score}_{\texttt{Dodgson}}(a) = 2 = \mathrm{score}_{\texttt{Dodgson}}(c)$$

Kemenyho hlasování

Definice (Kemenyho hlasování)

Nechť $P, Q \in \mathcal{L}(C)$. Pro každé dva kandidáty $c, d \in C$ definujeme jejich vzdálenost vzhledem k P a Q jako

$$\mathrm{dist}_{P,Q}(c,d) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } c \succ_P d \iff c \succ_Q d, \\ 2 & \text{pokud } c \succ_P d \wedge d \succ_Q c, \\ 2 & \text{pokud } d \succ_P c \wedge c \succ_Q d \text{ a} \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Skóre nějakého uspořádání P pak definujeme jako

$$\mathrm{score}_{\texttt{Kemeny}}(P) = \sum_{Q \in \mathscr{P}} \sum_{\{c,d\} \in \binom{C}{2}} \mathrm{dist}_{P,Q}(c,d).$$

Finálně, volební pravidlo `Kemeny` definujeme jako

$$\texttt{Kemeny}(\mathscr{P}) = \{c \mid \exists Q \in \arg\min_{P \in \mathcal{L}(C)} \mathrm{score}_{\texttt{Kemeny}}(P) \colon \ \mathrm{rank}(c,Q) = 1\}.$$

Kemenyho hlasování (pokračování)

Příklad: Mějme následující profil preferencí:

$$2\times : b \succ c \succ a \qquad 3\times : a \succ b \succ c \qquad 1\times : c \succ a \succ b$$

Potom platí

$\mathrm{dist}_{P,Q}$	$b \succ c \succ a$	$a \succ b \succ c$	$c \succ a \succ b$	$\mathrm{score}_{\mathtt{Kemeny}}(P)$
$a \succ b \succ c$	$2+2+0$	$0+0+0$	$2+0+2$	12
$a \succ c \succ b$	$2+2+2$	$0+0+2$	$0+2+0$	20
$b \succ a \succ c$	$0+2+0$	$2+0+0$	$2+2+2$	16
$b \succ c \succ a$	$0+0+0$	$2+2+0$	$2+0+2$	16
$c \succ a \succ b$	$2+0+2$	$0+2+2$	$0+0+0$	20
$c \succ b \succ a$	$0+0+2$	$2+2+2$	$2+0+0$	24

a tedy $\mathtt{Kemeny}(\mathscr{P}) = \{a\}$.

Schulzeho pravidlo

Definice (Schulzeho pravidlo)

Nechť $c, d \in C$ je dvojice vrcholů a $P = \{c = c_1, c_2, \ldots, c_\ell = d\}$ je nějaká c, d-cesta. Sílu cesty P definujeme jako

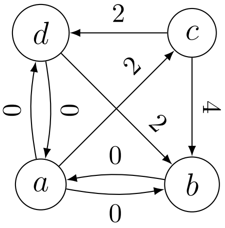
$$\mathrm{strength}(P) = \min_{i \in [\ell-1]} \mu(c_i, c_{i+1}) - \mu(c_{i+1}, c_i).$$

Položme $P(c, d) = \max_P \mathrm{strength}(P)$. Volbení pravidlo `Schulze` pak za vítěze volí každého kandidáta, pro kterého platí

$$P(c, d) \geq P(d, c) \qquad \forall d \in C.$$

Schulzeho pravidlo (pokračování)

Příklad: Mějme instanci voleb s následujícím grafem majority



Spočítáme $P(c,d)$ pro každou dvojici kandidátů

P	a	b	c	d
a	—	4	4	4
b	0	—	4	4
c	0	8	—	4
d	0	4	-4	—

Vítězem se tedy stává kandidát a.

Vícekolová pravidla

Dvoukolová většina

Definice

Nechť $\mathscr{P}$ je profil preferencí a $X \subseteq C$ je nějaká množina kandidátů. Jako $\mathscr{P}|_X$ označíme profil $(p_{v_1}|_X, \ldots, p_{v_n}|_X)$, ve kterém z každého hlasu p_{v_i} odstraníme všechny kandidáty $c \notin X$. $\mathscr{P}|_X$ nazveme zúžení $\mathscr{P}$ na X.

Definice (Dvoukolová většina)

Volební pravidlo `PluralityRO` definujeme pro každé (C, V) jako

$$\texttt{PluralityRO}(\mathscr{P}) = \begin{cases} \texttt{Majority}(\mathscr{P}) & \text{když } \texttt{Majority}(\mathscr{P}) \neq \emptyset, \\ \texttt{Plurality}(\mathscr{P}|_{\top 2}) & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\top 2 \subseteq C$ je množina dvou kandidátů s největším $\mathrm{score}_\top$.

Dvoukolová většina (pokračování)

Příklad: Mějme následující profil preferencí:

$$a \succ d \succ c \succ b \qquad c \succ d \succ b \succ a \qquad c \succ d \succ b \succ a$$
$$b \succ d \succ c \succ a \qquad d \succ c \succ a \succ b \qquad a \succ c \succ b \succ d$$

V prvním kole nemá žádný z kandidátů absolutní většinu. Omezíme se tady pouze na dva kandidáty s největším $\mathrm{score}_\top$: a a c.

$$\color{red}{a} \succ \color{gray}{d} \succ \color{red}{c} \succ \color{gray}{b} \qquad \color{red}{c} \succ \color{gray}{d} \succ \color{gray}{b} \succ \color{red}{a} \qquad \color{red}{c} \succ \color{gray}{d} \succ \color{gray}{b} \succ \color{red}{a}$$
$$\color{gray}{b} \succ \color{gray}{d} \succ \color{red}{c} \succ \color{red}{a} \qquad \color{gray}{d} \succ \color{red}{c} \succ \color{red}{a} \succ \color{gray}{b} \qquad \color{red}{a} \succ \color{red}{c} \succ \color{gray}{b} \succ d$$

V tomto profilu preferencí $\mathscr{P}|_{\top 2}$ vyhrává dle pravidla `Plurality` kandidát c. Tedy $\texttt{PluralityRO}(\mathscr{P}) = \{c\}$.

Alternativní hlasování

Definice (Alternativní hlasování)

Množinu přeživších v kole $i \in \mathbb{N}$ definujeme jako

$$S_i = S_{i-1} \setminus \arg \min_{c \in C \setminus S_{i-1}} \mathrm{score}_{\top}(c, \mathscr{P}|_{S_{i-1}}),$$

přičemž $S_0 = C$. Volební pravidlo $\mathtt{STV}$ pak definujeme jako

$$\mathtt{STV}(\mathscr{P}) = S_{i^*-1},$$

kde $i^* \in \mathbb{N}$ je první kolo takové, že $S_{i*} = \emptyset$.

Alternativní hlasování (pokračování)

Příklad: Mějme následující profil preferencí:

$$a \succ d \succ c \succ b \qquad c \succ d \succ b \succ a \qquad c \succ d \succ b \succ a$$
$$b \succ d \succ c \succ a \qquad d \succ c \succ a \succ b \qquad a \succ c \succ b \succ d$$

Nastavíme $S_0 = \{a, b, c, d\}$. V prvním kole odebereme b a d.

$$a \succ d \succ c \succ b \qquad c \succ d \succ b \succ a \qquad c \succ d \succ b \succ a$$
$$b \succ d \succ c \succ a \qquad d \succ c \succ a \succ b \qquad a \succ c \succ b \succ d$$

A tedy dostáváme $S_1 = \{a, c\}$. Ve druhém kole odebereme a.

$$a \succ d \succ c \succ b \qquad c \succ d \succ b \succ a \qquad c \succ d \succ b \succ a$$
$$b \succ d \succ c \succ a \qquad d \succ c \succ a \succ b \qquad a \succ c \succ b \succ d$$

A zbývá jen $S_2 = \{c\}$. Ten je v dalším kole eliminován a vzniká tak prázdná množina $S_3 = \emptyset$. Položíme tedy $\mathtt{STV}(\mathscr{P}) = S_2 = \{c\}$.

Bucklinovo hlasování

Definice (Bucklinovo hlasování)

Množina vítězů W_i pro kolo $i \in \mathbb{N}$ je definována jako

$$W_i = \{c \in C \mid \mathrm{score}_{\leq i}(c) \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1\}.$$

Volební pravidlo `Bucklin` je pak definováno jako

$$\texttt{Bucklin}(\mathscr{P}) = W_{i^*},$$

kde $i^* \in \mathbb{N}$ je první kolo takové, že $W_{i^*} \neq \emptyset$.

Bucklinovo hlasování (pokračování)

Příklad: Mějme následující profil preferencí:

$$a \succ d \succ c \succ b \qquad c \succ d \succ b \succ a \qquad c \succ d \succ b \succ a$$
$$b \succ d \succ c \succ a \qquad d \succ c \succ a \succ b \qquad a \succ c \succ b \succ d$$

Spočítáme jednotlivá $\mathrm{score}_{\leq i}$ postupně pro všechna $i \in \mathbb{N}$.

$\mathrm{score}_{\leq i}$	1	2	3	4
a	2	2	3	6
b	1	1	4	6
c	2	4	6	6
d	1	5	5	6

Hranice $\lfloor n/2 \rfloor + 1 = 4$ je poprvé překonána v kole $i = 2$ kandidáty c a d. Tedy $\texttt{Bucklin}(\mathscr{P}) = W_2 = \{c, d\}$.

Co bychom po dnešku měli znát

- Co jsou to volby – (C, V) a profil.
- Vybraná volební pravidla.

Dále nás čeká:

- Podrobná studie pravidel pro $|C| = 2$.
- Rozbor vlastností volebních pravidel.