Volby a volební systémy (NI-VOL), Přednáška č. 2

Vlastnosti volebních systémů

Dušan Knop

Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze
https://courses.fit.cvut.cz/NI-VOL/

LS 2024/2025,

(Verze dokumentu: 25. 2. 2025 10:43)

Volby

Definice

Volby jsou uspořádaná dvojice $\mathcal{E} = (C, V)$, kde

- C je konečná množina **kandidátů (alternativ)**, $|C| = m \geq 2$ a
- V je konečná a neprázdná množina **voličů (agentů)**, $|V| = n$.

Množinu všech lineárních uspořádání na množině C značíme $\mathcal{L}(C)$.
Profil preferencí $\mathscr{P} = (p_{v_1}, \ldots, p_{v_n})$ plně charakterizuje volby $\mathcal{E}$.

Volby vítěze(ů) Cílem je naleznout neprázdnou množinu vítězných alternativ $W \subseteq C$. Ideálně samosebou $|W| = 1$.

Definice

Nechť jsou (C, V) dány. **Volební pravidlo** je funkce

$$f \colon \mathcal{L}(C)^V \to 2^C \setminus \emptyset \,.$$

Měřit všem stejným metrem

Definice

Nechť (C, V) jsou volby. Volební pravidlo f je **diktátorské**, pokud existuje volič $v \in V$ takový, že pro každý preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ platí

$$f(\mathscr{P}) = \{c \in C \mid \operatorname{rank}(c, p_v) = 1\} \ .$$

- Výše zmíněná vlastnost je velmi negativní.
- Je lehké nahlédnout, že ji splňuje pravidlo `Dictatorship`.
- Dokonce platí, že `Dictatorship` je **jediné** diktátorské volební pravidlo.

Měřit všem stejným metrem (pokračování)

Lemma 1

`Dictatorship` je jediné diktátorské volební pravidlo.

Důkaz.

Dvě volební pravidla f, g jsou různá, pokud existuje alespoň jeden profil preferencí $\mathscr{P}$ takový, že $f(\mathscr{P}) \neq g(\mathscr{P})$.
Pro spor předpokládejme, že kromě $\texttt{Dictatorship}_v$ existuje ještě nějaké další diktátorské pravidlo f. Zvolme $\mathscr{P}$ tak, že $\texttt{Dictatorship}(\mathscr{P}) \neq f(\mathscr{P})$. Dle definice diktátorství je $\texttt{Dictatorship}(\mathscr{P}) = \{c \in C \mid \operatorname{rank}(c, p_v) = 1\}$. Pro profil $\mathscr{P}$ tedy f nevrátí množinu vítězů $\{c \in C \mid \operatorname{rank}(c, p_v) = 1\}$. To je zjevný spor s tím, že f je diktátorské volební pravidlo. $\square$

- „Dobrá“ volební pravidla jsou nejen nediktátorská, ale mají ještě další, silnější vlastnosti.

Měřit všem stejným metrem

Definice

Nechť (C, V) jsou volby. Volební pravidlo f je **anonymní**, pokud pro každý preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ a každou permutaci $\pi\colon V \to V$ platí

$$f(\mathscr{P} = (\succeq_{v_1}, \succeq_{v_2}, \ldots, \succeq_{v_n})) = f((\succeq_{\pi(v_1)}, \succeq_{\pi(v_2)}, \ldots, \succeq_{\pi(v_n)}))\,.$$

Definice

Nechť (C, V) jsou volby. Volební pravidlo f je **neutrální**, pokud pro každý preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ a každou permutaci $\sigma\colon C \to C$ platí

$$f(\mathscr{P} = (\succeq_{v_1}, \succeq_{v_2}, \ldots, \succeq_{v_n})) = f((\sigma(\succeq_{v_1}), \sigma(\succeq_{v_2}), \ldots, \sigma(\succeq_{v_n})))\,,$$

kde $\sigma(\succeq_{v_i}) = \sigma(c_1) \succeq \sigma(c_2) \succeq \cdots \succeq \sigma(c_m)$.

Další základní vlastnosti

Definice

Volební pravidlo f je **jednomyslné**, pokud pro každý preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ takový, že existuje $c \in C$ tak, že pro každého voliče $v \in V$ máme $\max_{\succeq_v}(C) = \{c\}$, potom platí $f(\mathscr{P}) = \{c\}$.

Definice

Volební pravidlo f je **rezolutní**, pokud pro každý preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ platí $|f(\mathscr{P})| = 1$.

Definice

Volební pravidlo f je **nevynucené** (též **občansky svrchované**), pokud pro každého kandidáte $c \in C$ existuje nějaký preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ takový, že $c \in f(\mathscr{P})$. V opačném případě hovoříme o **vynuceném** pravidle.

Základní vlastnosti – shrnutí

- Základní vlastnosti jsou ty „nejvíce přirozené“.
- Zachycují vlastnosti, že by žádná alternativa neměla být univerzálně preferovanou, nezáleží na jménech voličů a každý má šanci vyhrát.
- Lze vypozorovat, že některé vlastnosti implikují jiné.

Pozorování

Každé jednomyslné volební pravidlo je zároveň občansky svrchované.

Důkaz.

Nechť f je jednomyslné volební pravidlo, které není občansky svrchované, tedy existuje kandidát $c \in C$ takový, že $c \notin f(\mathscr{P})$ pro žádný $\mathscr{P}$. Zvolme $\mathscr{Q}$ takový, že pro každého $v \in V$ platí $\max_{\succeq_v}(C) = \{c\}$. Potom dle jednomyslnosti musí být $f(\mathscr{Q}) = \{c\}$, což je spor s tím, že f není občansky svrchované. $\square$

Základní vlastnosti – shrnutí (pokračování)

- Není těžké nahlédnout, že opačná implikace neplatí.

Rozumná pravidla

Všechna nediktátorská pravidla z minulé přednášky jsou též navíc: anonymní, neutrální, jednomyslná a nevynucená.

- Rezoluce je překvapivě „těžká“ i „lehká“ vlastnost.
- Každé pravidlo lze změnit na rezolutní přidáním dodatečného pravidla pro „remízy“ (kupříkladu rozhodneme podle abecedy).
- Toto s sebou překvapivě může nést nějaké následky.
- Speciálně jiné základní vlastnosti to neovlivní, ale může to vést na ztrátu jiných vlastností.

Konzistence

Definice

Volební pravidlo f je **Pareto konzistentní**, pokud pro každý preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ a každé $x \in C$ platí, že pokud existuje $y \in C$ takové, že $y \succ_v x$ pro každého voliče $v \in V$, potom $x \notin f(\mathscr{P})$.

- Velice základní vlastnost splněná všemi našimi pravidly.

Definice

Volební pravidlo f je **konzistentní** (někdy též **separabilní**), pokud pro každý preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ a každý rozklad množiny voličů $V = V_1 \dot{\cup} V_2 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} V_k$ pokud $c \in f(\mathscr{P}|_{V_i})$ pro všechna $i \in [k]$, $2 \leq k \leq n$, pak také $c \in f(\mathscr{P})$.

Vlastnost požaduje, aby výsledné pořadí dvou kandidátů záviselo pouze na jejich vzájemném postavení v hlasech.

Definice

Volební pravidlo f je **konzistentní** (někdy též **separabilní**), pokud pro každý preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ a každý rozklad množiny voličů $V = V_1 \dot\cup V_2 \dot\cup \cdots \dot\cup V_k$ pokud $c \in f(\mathscr{P}|_{V_i})$ pro všechna $i \in [k]$, $2 \le k \le n$, pak také $c \in f(\mathscr{P})$.

Mějme volby obsahující hlasy:

$$V_1: \quad 7 \times a \succ b \succ c \quad 5 \times b \succ c \succ a \quad 4 \times c \succ a \succ b$$
$$V_2: \quad 5 \times a \succ c \succ b \quad 4 \times c \succ b \succ a$$

	Voliči V		Voliči V_1		Voliči V_2	
	`Copeland`	`Young`	`Copeland`	`Young`	`Copeland`	`Young`
a	1	–	**1**	**2**	**2**	**0**
b	0	–	**1**	6	0	–
c	**2**	**0**	**1**	8	1	–

Definice

Volební pravidlo f je **konzistentní** (někdy též **separabilní**), pokud pro každý preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ a každý rozklad množiny voličů $V = V_1 \dot\cup V_2 \dot\cup \cdots \dot\cup V_k$ pokud $c \in f(\mathscr{P}|_{V_i})$ pro všechna $i \in [k]$, $2 \le k \le n$, pak také $c \in f(\mathscr{P})$.

Tvrzení

Pro každou skórovací posloupnost $\vec{s}$ je $\mathtt{PSP}_{\vec{s}}$ konzistentní.

Důkaz.

- Celkový počet bodů je součtem bodů přes libovolné součásti.
- Pokud tedy kandidát vyhraje v nějakém rozložení, jistě vyhraje i celkově. □

Tvrzení

`Copeland` a `Young` nejsou konzistentní.

Odolnost na strategii

Mějme volby s kandidáty $C = \{a, b, c, d\}$ a voliči

$$p_{v_1}: d \succ c \succ b \succ a \quad p_{v_2}: a \succ b \succ c \succ d \quad p_{v_3}: a \succ b \succ c \succ d$$

Uvažme, že v_1 zná všechny preference a použité pravidlo je `Borda`. Co kdyby raději podal hlas $b \succ d \succ c \succ a$ (tím vznikne profil $\mathscr{P}'$)?

	a	b	c	d
$\mathscr{P}$	6	5	4	3
$\mathscr{P}'$	6	7	3	2

Tedy volbou $b \succ d \succ c \succ a$ namísto „pravého“ hlasu $d \succ c \succ b \succ a$ byl výsledkem b a přitom $b \succ_{v_1} a$!

Definice

Volební pravidlo f je **odolné na strategii**, pokud pro žádné preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ a žádného voliče $v \in V$ neexistuje $\mathscr{P}'$ lišící se od $\mathscr{P}$ pouze v hlasu voliče v takový, že $f(\mathscr{P}') \succ_v f(\mathscr{P})$.

Odolnost na strategii

Definice

Volební pravidlo f je **odolné na strategii**, pokud pro žádné preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ a žádného voliče $v \in V$ neexistuje $\mathscr{P}'$ lišící se od $\mathscr{P}$ pouze v hlasu voliče v takový, že $f(\mathscr{P}') \succ_v f(\mathscr{P})$.

Věta

Pro $|C| \geq 3$ neexistuje žádný volební systém založený na preferencích, který je zároveň:

1. nediktátorský,
2. rezolutní,
3. občansky svrchovaný a
4. odolný na strategii.

Odolnost na strategii

Věta

Pro $|C| \geq 3$ neexistuje žádný volební systém založený na preferencích, který je zároveň:

1. nediktátorský,
2. rezolutní,
3. občansky svrchovaný a
4. odolný na strategii.

Věta (Alternativně)

Pro $|C| \geq 3$ pokud je volební systém založený na preferencích a je

1. rezolutní
2. občansky svrchovaný a
3. odolný na strategii,

potom je diktátorský.

Odolnost na strategii

Věta (Alternativně)

Pro $|C| \geq 3$ pokud je volební systém založený na preferencích a je

1. rezolutní
2. občansky svrchovaný a
3. odolný na strategii,

potom je diktátorský.

Dle Lemma 1 též: Pro $|C| \geq 3$ je `Dictatorship` jediné volební pravidlo založené na preferencích, které je zároveň

1. rezolutní,
2. občansky svrchované a
3. odolné na strategii.

Máme **charakterizaci** pravidla `Dictatorship`.

Otázky

Máme **charakterizaci** pravidla `Dictatorship`.

- Může/nemůže existovat volební pravidlo daných kvalit?
- Vlastnosti někdy též označujeme jako **axiomy**.
- Je možné charakterizovat pravidlo? Tedy ukázat, že je **jediné** splňující danou kombinaci axiomů?

Věta

Pro $|C| \geq 3$ pokud je volební systém založený na preferencích a je

1. rezolutní
2. občansky svrchovaný a
3. odolný na strategii,

potom je diktátorský.

- Porušení které z vlastností je „nejméně problematické“?

Monotonie

Definice

Nechť (C, V) jsou volby. Volební pravidlo f je **monotónní**, pokud pro preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ a každého kandidáta $c \in f(\mathscr{P})$ platí, že pro preferenční profil $\mathscr{P}'$ vzniklý z $\mathscr{P}$ pouze zlepšením pozic c v některých hlasech (tj. ostatní vztahy mezi dvojicemi kandidátů), pak $c \in f(\mathscr{P}')$.

Tvrzení

`Dodgson` není monotónní.

Fakt

`Plurality`, `Borda`, `Copeland`, `Young`, `Bucklin` a `Schulze` jsou monotónní volební pravidla.

Monotonie

Tvrzení

Dodgson není monotónní.

Důkaz.

Uvažme profil

$$\begin{aligned} \mathscr{P} : 15 \times c \succ a \succ d \succ b \quad & 9 \times b \succ d \succ c \succ a \quad 9 \times a \succ b \succ d \succ c \\ 5 \times a \succ c \succ b \succ d \quad & 5 \times b \succ a \succ c \succ d \end{aligned}$$

a změněný profil

$$\begin{aligned} \mathscr{P}' : 15 \times c \succ a \succ d \succ b \quad & 9 \times b \succ d \succ c \succ a \quad 9 \times a \succ b \succ d \succ c \\ 5 \times a \succ c \succ b \succ d \quad & 5 \times \mathbf{a} \succ \mathbf{b} \succ c \succ d \end{aligned}$$

- V $\mathscr{P}$ vyhraje a (3 swapy).
- V $\mathscr{P}'$ vyhraje c (2 swapy). $\square$

Silná monotonie

Definice

Nechť (C, V) jsou volby. Volební pravidlo f je **monotónní**, pokud pro preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ a každého kandidáta $c \in f(\mathscr{P})$ platí, že pro preferenční profil $\mathscr{P}'$ vzniklý z $\mathscr{P}$ pouze zlepšením pozic c v některých hlasech (tj. ostatní vztahy mezi dvojicemi kandidátů), pak $c \in f(\mathscr{P}')$.

Definice

Nechť (C, V) jsou volby. Volební pravidlo f je **silně monotónní**, pokud pro preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ a každého kandidáta $c \in f(\mathscr{P})$ platí, že pro preferenční profil $\mathscr{P}'$ vzniklý z $\mathscr{P}$

1. zlepšením pozic c v některých hlasech
2. libovolným prohozením pozic ostatních kandidátů s tím, že v každém hlase $v \in V$ platí, že $c \succ_v d$ implikuje $c \succ_{v'} d$ (tj. pokud c byl prefereovaný, musí zůstat preferovaný),

pak $c \in f(\mathscr{P}')$.

Silná monotonie

Definice

Nechť (C, V) jsou volby. Volební pravidlo f je **silně monotónní**, pokud pro preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ a každého kandidáta $c \in f(\mathscr{P})$ platí, že pro preferenční profil $\mathscr{P}'$ vzniklý z $\mathscr{P}$

1. zlepšením pozic c v některých hlasech
2. libovolným prohozením pozic ostatních kandidátů s tím, že v každém hlase $v \in V$ platí, že $c \succ_v d$ implikuje $c \succ_{v'} d$ (tj. pokud c byl prefereovaný, musí zůstat preferovaný),

pak $c \in f(\mathscr{P}')$.

Věta (Muller & Satterthwaite)

Nechť $|C| > 2$. Potom neexistuje žádný volební systém založený na preferencích, který je zároveň

1. nediktátorský
2. rezolutní
3. občansky svrchovaný a
4. silně monotónní.

Nezávislost na klonech

Definice

Kandidáti $c, d \in C$ jsou **klony**, pokud jsou těsně vedle sebe v každém hlase.

Uvažme profil $\mathscr{P}$:

$$p_{v_1} : a \succ c \succ b \succ d \quad p_{v_2} : a \succ b \succ c \succ d \quad p_{v_3} : a \succ b \succ c \succ d$$

Alternativy b, c jsou klony a jiné klony nejsou obsažené.

Tideman

Bylo mi 12 let a byl jsem nominovaný na třídního pokladníka. Jedna dívka Michelle byla také nominovaná. Moc jsem chtěl být pokladníkem, tak jsem po rychlém počítání navrhl také Michellinu nejlepší kamarádku Charlotte. Výsledkem bylo 13 hlasů pro mne, 12 pro Michelle a 11 pro Charlotte.

Tideman

Bylo mi 12 let a byl jsem nominovaný na třídního pokladníka. Jedna dívka Michelle byla také nominovaná. Moc jsem chtěl být pokladníkem, tak jsem po rychlém počítání navrhl také Michellinu nejlepší kamarádku Charlotte. Výsledkem bylo 13 hlasů pro mne, 12 pro Michelle a 11 pro Charlotte.

- Volilo se samo sebou pomocí pravidla `Plurality`.
- Manipulátorovi se podařilo rozdělit hlasy kamarádek tím, že se musely rozhodnout pro právě jednu z dívek.
- Jedná se o jednoduchou manipulaci, která je však v praxi velmi populární. (Příklady?)

Definice

Volební pravidlo je **odolné na klony**, pokud není možné přidáním klonu libovolného kandidáta udělat z nějakého prohrávajícího kandidáta vítěze.

Fakt

`Schulze` je volební pravidlo odolné na klony.

Tvrzení

`Dodgson` není odolné na klony.

Důkaz.

Uvažme profil pro $C = \{a, b, c\}$ a profil s klonem c':

$$\mathscr{P}: 5 \times a \succ b \succ c \quad 4 \times b \succ c \succ a \quad 3 \times c \succ a \succ b$$

$$\widehat{\mathscr{P}}: 5 \times a \succ b \succ c \succ c' \quad 4 \times b \succ c \succ c' \succ a \quad 3 \times c \succ c' \succ a \succ b$$

- V $\mathscr{P}$ vyhraje a (2 přehození: potřebuje porazit c).
- V $\widehat{\mathscr{P}}$ vyhraje b (3 přehození: potřebuje porazit a). □

- Rozmyslete si také pro `Borda` a `Bucklin`.

Participace

Definice

Volební pravidlo f má **No Show paradox**, pokud existuje preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ takový, že $f(\mathscr{P} - v) \succ_v f(\mathscr{P})$. Jinak má pravidlo vlastnost **participace**.

- Tedy pro v je lepší k volbám nejít.
- A co kdyby nepřišel nikdo, že?

Věta (Moulin)

1. Pokud $|C| \leq 3$, existují volební pravidla splňující zároveň participaci a Condorcet konzistenci.
2. Pokud $|C| > 3$ (a $|V| > 24$), žádné volební pravidlo nesplňuje zároveň participaci a Condorcet konzistenci.

Dvojčata

Definice

Volební pravidlo f má **Twin paradox**, pokud existuje preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ takový, že $f(\mathscr{P}) \succ_v f(\mathscr{P} + v)$ (tj. zdvojili jsme hlas v). Jinak má pravidlo vlastnost **vítaných dvojčat**.

Důsledek (Moulin)

Pokud $|C| > 3$ (a $|V| > 24 + \binom{|C|}{2}$), žádné volební pravidlo nesplňuje zároveň vítání dvojčat a Condorcet konzistenci.

Homogenita

Definice

Volební pravidlo f je **homogenní**, pokud pro každý preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ a jeho k-násobek $\mathscr{P}^{(k)}$ (tj. každý hlas zopkujeme k-krát), pak $f(\mathscr{P}) = f(\mathscr{P}^{(k)})$ pro každé $k \geq 1$.

Tvrzení

`Dodgson` není homogenní.

Důkaz.

Uvažme profil $\mathscr{P}$

$$
\begin{array}{lll}
2 \times d \succ c \succ a \succ b & 2 \times b \succ c \succ a \succ d & 2 \times c \succ a \succ b \succ d \\
2 \times d \succ b \succ c \succ a & 2 \times a \succ b \succ c \succ d & \\
1 \times a \succ d \succ b \succ c & 1 \times d \succ a \succ b \succ c &
\end{array}
$$

- a vyhraje na 3 swapy
- v $\mathscr{P}^{(3)}$ vyhraje b se 6 swapy

□

Irelevantní alternativy

Pan Morgensbesser is objednával dezert. Číšník mu nabídl jablečný či borůvkový koláč. Zvolil si tedy **jablečný**.
Po chvilce se číšník vrátil s tím, že lze ještě vybrat višňový koláč. Pan Morgensbesser říká: **„V tom případě bych si dal ten borůvkový.“**

Definice

Volební pravidlo f je **nezávislé na irelevantních alternativách**, pokud pro každý preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ a jeho rozšíření $\mathscr{P}' = \mathscr{P} \cup \{c\}$, $c \notin C$, (tj. pouze vložíme novou alternativu c, ale jinak zachováme veškeré vztahy u všech voličů), pak pravidlo f vrací $x \succeq_{f(\mathscr{P})} y$, pokud $x \succeq_{f(\mathscr{P}')} y$ pro libovolné $x, y \in C$.

- Výsledné pořadí dvou kandidátů by mělo záviset pouze na jejich vzájemném postavení v hlasech.

Irelevantní alternativy

Definice

Volební pravidlo f je **nezávislé na irelevantních alternativách**, pokud pro každý preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ a jeho rozšíření $\mathscr{P}' = \mathscr{P} \cup \{c\}$, $c \notin C$, (tj. pouze vložíme novou alternativu c, ale jinak zachováme veškeré vztahy u všech voličů), pak pravidlo f vrací $x \succeq_{f(\mathscr{P})} y$, pokud $x \succeq_{f(\mathscr{P}')} y$ pro libovolné $x, y \in C$.

Věta (Arrow)

Nechť $|C| > 2$. Neexistuje volební systém založený na preferencích, který je zároveň

1. nediktátorský,
2. Pareto konzistentní a
3. nezávislý na irelevantních alternativách.

Co bychom po dnešku měli znát

- Základní vlastnosti volebních pravidel.
- Pokročilejší vlastnosti volebních pravidel.
- Nelze mít všechny skvělé vlastnosti.
- Neexistuje „dokonalé" volební pravidlo.