Volby a volební systémy (NI-VOL), Přednáška č. 3

Dvě alternativy

Dušan Knop

Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze
https://courses.fit.cvut.cz/NI-VOL/

LS 2024/2025,

(Verze dokumentu: 4. 3. 2025 09:33)

Volby

Definice

Volby jsou uspořádaná dvojice $\mathcal{E} = (C, V)$, kde

- C je konečná množina **kandidátů (alternativ)**, $|C| = m \geq 2$ a
- V je konečná a neprázdná množina **voličů (agentů)**, $|V| = n$.

Množinu všech lineárních uspořádání na množině C značíme $\mathcal{L}(C)$.
Profil preferencí $\mathscr{P} = (p_{v_1}, \ldots, p_{v_n})$ plně charakterizuje volby $\mathcal{E}$.

Volby vítěze(ů) Cílem je naleznout neprázdnou množinu vítězných alternativ $W \subseteq C$. Ideálně samo sebou $|W| = 1$.

Definice

Nechť jsou (C, V) dány. **Volební pravidlo** je funkce

$$f \colon \mathcal{L}(C)^V \to 2^C \setminus \emptyset\,.$$

Definice

Nechť (C, V) jsou volby. Volební pravidlo f je **anonymní**, pokud pro každý preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ a každou permutaci $\pi\colon V \to V$ platí

$$f(\mathscr{P} = (\succeq_{v_1}, \succeq_{v_2}, \ldots, \succeq_{v_n})) = f((\succeq_{\pi(v_1)}, \succeq_{\pi(v_2)}, \ldots, \succeq_{\pi(v_n)}))\,.$$

Definice

Nechť (C, V) jsou volby. Volební pravidlo f je **neutrální**, pokud pro každý preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ a každou permutaci $\sigma\colon C \to C$ platí

$$f(\mathscr{P} = (\succeq_{v_1}, \succeq_{v_2}, \ldots, \succeq_{v_n})) = f((\sigma(\succeq_{v_1}), \sigma(\succeq_{v_2}), \ldots, \sigma(\succeq_{v_n})))\,,$$

kde $\sigma(\succeq_{v_i}) = \sigma(c_1) \succeq \sigma(c_2) \succeq \cdots \succeq \sigma(c_m)$.

Další základní vlastnosti

Definice

Volební pravidlo f je **rezolutní**, pokud pro každý preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ platí $|f(\mathscr{P})| = 1$.

Definice

Nechť (C, V) jsou volby. Volební pravidlo f je **monotónní**, pokud pro preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ a každého kandidáta $c \in f(\mathscr{P})$ platí, že pro preferenční profil $\mathscr{P}'$ vzniklý z $\mathscr{P}$ pouze zlepšením pozic c v některých hlasech (tj. ostatní vztahy mezi dvojicemi kandidátů), pak $c \in f(\mathscr{P}')$.

Věta

Nechť $m = 2$ a n je liché. Potom `Plurality` je jediné pravidlo, které je zároveň rezolutní, anonymní, neutrální a monotónní.

$\Rightarrow$ cvičení.

Důkaz $\Leftarrow$

- Nechť f je rezolutní, anonymní, neutrální a monotónní pravidlo.
- Sporem ukážeme, že $f = \texttt{Plurality}$.
- Protože máme 2 alternativy $C = \{x, y\}$, je výstupem **rezolutního pravidla** buď x nebo y.
- Navíc máme jen dva možné hlasy $x \succ y$ a $y \succ x$.
- Pro spor tedy předpokládejme,že $f \neq \texttt{Plurality}$.
- Musí tedy existovat liché n a profil $\mathscr{P}$ takové, že
  - $\texttt{Plurality}(\mathscr{P}) = \{x\}$
  - $f(\mathscr{P}) = \{y\}$
- Speciálně pak počet hlasů $x \succ y$ převažuje v $\mathscr{P}$ nad hlasy $y \succ x$.
  - Označme $\#^{xy}_{\mathscr{P}}$ počet hlasů $x \succ y$ v $\mathscr{P}$.
  - Označme $\#^{yx}_{\mathscr{P}}$ počet hlasů $y \succ x$ v $\mathscr{P}$.

Důkaz $\Leftarrow$ (pokračování)

- Obě jsou **neutrální** a my můžeme v $\mathscr{P}$ „prohodit“ alternativy – vytvoříme profil $\mathscr{P}'$.
- Víme, že $f(\mathscr{P}') = \{x\}$.
- Díky **anonymitě** můžeme měnit jména voličů tak, aby hlasy $y \succ x$ byly od stejných voličů v $\mathscr{P}$ i $\mathscr{P}'$ (formálně tvoříme $\mathscr{P}''$). A částečně i pro $x \succ y$.
- Máme tedy tři (neprázdné) množiny voličů:

  $V_{x,x}$ volí $x \succ y$ v $\mathscr{P}$ i $\mathscr{P}'$
  $V_{y,y}$ volí $y \succ x$ v $\mathscr{P}$ i $\mathscr{P}'$
  $V_{x,y}$ volí $x \succ y$ v $\mathscr{P}$ ale $y \succ x$ v $\mathscr{P}'$

- Ale každý volič z $V_{x,y}$ oproti $\mathscr{P}$ pouze zlepšil pozici kandidáta y, ale tím pádem by **monotónní** pravidlo f mělo volit y na $\mathscr{P}'$. Jenže volí x a my dostáváme spor. $\square$

Sudá n?

- Pokud je n sudé, můžeme dospět k remíze a jediná možnost je vrátit C.

Definice

Nechť (C, V) jsou volby. Volební pravidlo f je **pozitivně responzivní**, pokud pro preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ a každého kandidáta $c \in f(\mathscr{P})$ platí, že pro preferenční profil $\mathscr{P}'$ vzniklý z $\mathscr{P}$ pouze zlepšením pozice c v libovolném hlase, pak $f(\mathscr{P}') = \{c\}$.

Věta

Nechť $m = 2$. Potom `Plurality` je jediné pravidlo, které je zároveň anonymní, neutrální a positivně responzivní.

Důkaz.

Cvičení. □

Pozorujeme pravdu

Uvažme následující scénář:

- Máme **dvě alternativy** $C = \{x, y\}$ a jedna z nich je **objektivně (měřitelně) lepší**.
- Voliči nevědí, které z pořadí $x \succ y$ a $y \succ x$ je správné.
- Každý volič $v \in V$ má pravděpodobnost p, že pozná správné pořadí.
- Pravděpodobnost p je pro všechny stejná a platí $1/2 < p \leq 1$.
- Formálně
$$\Pr\left[x \succ_i y \mid \succ = xy\right] = p\,.$$
- Hlasy jsou tedy náhodné proměnné (n-krát házíme mincí).
- Správné pořadí $\succ$ by mělo být nejčastěji pozorované.
- `Plurality`?

Pozorujeme pravdu – příklad

Příklad

- $V = \{1, 2, 3\}$ a $C = \{a, b\}$.
- Nechť $\Pr[ab] = \Pr[ba] = \frac{1}{2}$.
- Nechť dále $p = \frac{2}{3}$.
- Mějme profil $\mathscr{P} = \langle ab, ab, ba \rangle$. Tj. $a \succ_1 b$, $a \succ_2 b$, $b \succ_3 a$.
- Potom pozorujeme-li $\mathscr{P}$, máme

$$\Pr[\mathscr{P} \mid \succ = ab] = p^2 \cdot (1 - p)$$
$$\Pr[\mathscr{P} \mid \succ = ba] = p \cdot (1 - p)^2$$

- Tedy $\succ = ab$ je $\frac{p}{1-p} = 2$ krát pravděpodobnější než ba (pozorujíce $\mathscr{P}$).

Bayesova věta

Věta (Bayes)

Nechť $B_1, \ldots, B_n$ je rozklad Ω takový, že $\Pr[B_i] > 0$ a nechť A je náhodný jev kde $\Pr[A] > 0$. Potom platí

$$\Pr[B_j \mid A] = \frac{\Pr[A \mid B_j] \cdot \Pr[B_j]}{\sum_{i=1}^{n} \left(\Pr[A \mid B_i] \cdot \Pr[B_i]\right)} \,.$$

Tedy za předpokladu $\Pr[ab] = \Pr[ba] = \frac{1}{2}$ dostáváme

$$\begin{aligned}
&\Pr[\succ = ab \mid \mathscr{P}] \\
&\quad = \frac{\Pr[\mathscr{P} \mid \succ = ab] \cdot \Pr[\succ = ab]}{\Pr[\mathscr{P} \mid \succ = ab] \cdot \Pr[\succ = ab] + \Pr[\mathscr{P} \mid \succ = ba] \cdot \Pr[\succ = ba]} \\
&\quad = \frac{p^2 \cdot (1-p) \cdot 0.5}{p^2 \cdot (1-p) \cdot 0.5 + p \cdot (1-p)^2 \cdot 0.5} \\
&\quad = \frac{p^2 \cdot (1-p)}{p^2 \cdot (1-p) + p \cdot (1-p)^2} = \frac{p}{p + (1-p)} = \frac{p}{1} = p \,.
\end{aligned}$$

Condorcet jury theorem

Věta

Nechť $m = 2$, n liché a $1/2 < p \leq 1$. Nechť profil $\mathscr{P}$ je tvořen n náhodnými hlasy dle p (i.i.d.). Potom

$$
\begin{aligned}
p_{\texttt{Plurality}}(n) &\leq p_{\texttt{Plurality}}(n+2) \\
p &\leq p_{\texttt{Plurality}}(n) \\
\lim_{n\to\infty} p_{\texttt{Plurality}}(n) &= 1
\end{aligned}
$$

kde $p_{\texttt{Plurality}}(n)$ je pravděpodobnost, že získání pravdy při volbě `Plurality`.

Důkaz

- `Plurality` je korektní, pokud majorita voličů pozorovala (hlasovala) správně.
- Označme h počet voličů hlasujících správně.
- Takových majorit je celkem

$$\sum_{h=\frac{n+1}{2}}^{n} \binom{n}{h}.$$

- Pravděpodobnost, že právě h voličů hlasuje správně je $p^h \cdot (1-p)^{n-h}$
- Máme tedy

$$p_{\texttt{Plurality}}(n) = \sum_{h=\frac{n+1}{2}}^{n} \binom{n}{h} \cdot p^h \cdot (1-p)^{n-h}$$

- Rozmyslíme si nyní jednotlivá tvrzení věty (první je složitější).

Důkaz $p_{\texttt{Plurality}}(n) \leq p_{\texttt{Plurality}}(n+2)$ – začátek

- Zaměřme se na profily obsahující $n+2$ voličů (případně více).
- Interpretujeme $p_{\texttt{Plurality}}(n+2)$ jako pravděpodobnost, že **alespoň polovina z prvních** $n+2$ voličů v profilu pozoruje správně. Označme tuto událost H_{n+2}.
- Interpretujeme $p_{\texttt{Plurality}}(n)$ jako pravděpodobnost, že **alespoň polovina z prvních** n voličů v profilu pozoruje správně. Označme tuto událost H_n.
- Tedy $p_{\texttt{Plurality}}(n+2) = \Pr[H_{n+2}]$ a $p_{\texttt{Plurality}}(n) = \Pr[H_n]$.
- Počítejme

$$\begin{aligned}
p_{\texttt{Plurality}}(n+2) &= \Pr[H_{n+2}] \\
&= \Pr[H_{n+2} \setminus H_n] + \Pr[H_{n+2} \cap H_n] \\
&= \Pr[H_{n+2} \setminus H_n] + \Pr[H_n] - \Pr[H_n \setminus H_{n+2}] \\
&= p_{\texttt{Plurality}}(n) + \Pr[H_{n+2} \setminus H_n] - \Pr[H_n \setminus H_{n+2}]
\end{aligned}$$

- Tedy chceme ukázat, že $\Pr[H_{n+2} \setminus H_n] > \Pr[H_n \setminus H_{n+2}]$.

Důkaz $\Pr[H_{n+2} \setminus H_n] = p \cdot \binom{n}{\frac{n+1}{2}} \cdot (p \cdot (1-p))^{\frac{n+1}{2}}$

- Kdy nastane $H_{n+2} \setminus H_n$?
  - Prvních n hlasů obsahuje těsnou majoritu špatných hlasů.
  - Následují dva správné hlasy.
- První událost má pravděpodobnost

$$\binom{n}{\frac{n+1}{2}} \cdot p^{\frac{n-1}{2}} \cdot (1-p)^{\frac{n+1}{2}}$$

- Druhá má pravděpodobnost p^2.
- Tedy

$$\begin{aligned}\Pr[H_{n+2} \setminus H_n] &= \binom{n}{\frac{n+1}{2}} \cdot p^{\frac{n-1}{2}} \cdot (1-p)^{\frac{n+1}{2}} \cdot p^2 \\ &= p \cdot \binom{n}{\frac{n+1}{2}} \cdot (p \cdot (1-p))^{\frac{n+1}{2}}\end{aligned}$$

Důkaz

$$\Pr[H_n \setminus H_{n+2}] = (1-p) \cdot \binom{n}{\frac{n+1}{2}} \cdot (p \cdot (1-p))^{\frac{n+1}{2}}$$

- Kdy nastane $H_n \setminus H_{n+2}$?
  - Prvních n hlasů obsahuje těsnou majoritu správných hlasů.
  - Následují dva špatné hlasy.
- První událost má pravděpodobnost

$$\binom{n}{\frac{n+1}{2}} \cdot p^{\frac{n+1}{2}} \cdot (1-p)^{\frac{n-1}{2}}$$

- Druhá má pravděpodobnost $(1-p)^2$.
- Tedy

$$\begin{aligned}\Pr[H_n \setminus H_{n+2}] &= \binom{n}{\frac{n+1}{2}} \cdot p^{\frac{n+1}{2}} \cdot (1-p)^{\frac{n-1}{2}} \cdot (1-p)^2 \\ &= (1-p) \cdot \binom{n}{\frac{n+1}{2}} \cdot (p \cdot (1-p))^{\frac{n+1}{2}}\end{aligned}$$

Důkaz $p_{\texttt{Plurality}}(n) \le p_{\texttt{Plurality}}(n+2)$ – finiš

Počítejme:

$$\begin{aligned}
&\Pr[H_{n+2} \setminus H_n] - \Pr[H_n \setminus H_{n+2}] \\
&= p \cdot \binom{n}{\frac{n+1}{2}} \cdot (p \cdot (1-p))^{\frac{n+1}{2}} - (1-p) \cdot \binom{n}{\frac{n+1}{2}} \cdot (p \cdot (1-p))^{\frac{n+1}{2}} \\
&= (2p-1) \cdot \binom{n}{\frac{n+1}{2}} \cdot (p \cdot (1-p))^{\frac{n+1}{2}}
\end{aligned}$$

Protože $p > 1/2$, dostáváme

$$\underbrace{(2p-1)}_{>0} \cdot \binom{n}{\frac{n+1}{2}} \cdot (\underbrace{p \cdot (1-p)}_{\ge 0})^{\frac{n+1}{2}} \ge 0\,.$$

Závěrem tedy

$$\begin{aligned}
p_{\texttt{Plurality}}(n+2) &= p_{\texttt{Plurality}}(n) + \Pr[H_{n+2} \setminus H_n] - \Pr[H_n \setminus H_{n+2}] \\
&\ge p_{\texttt{Plurality}}(n)\,.
\end{aligned}$$

Důkaz

$p_{\texttt{Plurality}}(n+2) \geq p_{\texttt{Plurality}}(n)$ hotovo.

$p \leq p_{\texttt{Plurality}}(n)$

- Víme, že $p = p_{\texttt{Plurality}}(1)$.
- Již jsme dokázali, že pro všechna lichá n platí $p_{\texttt{Plurality}}(n+2) \geq p_{\texttt{Plurality}}(n)$.

$\lim_{n\to\infty} p_{\texttt{Plurality}}(n) = 1$

- Dle zákona velkých čísel konverguje průměr počet správných hlasů k p.
- Protože ale $p > 1/2$, tak pravděpobodnost, že `Plurality` odpoví správně jde k 1.

□

Condorcet jury theorem (Condorcet 1785)

Věta

Nechť $m = 2$, n liché a $1/2 < p \leq 1$. Nechť profil $\mathscr{P}$ je tvořen n náhodnými hlasy dle p (i.i.d.). Potom

$$\begin{aligned} p_{\texttt{Plurality}}(n) &\leq p_{\texttt{Plurality}}(n+2) \\ p &\leq p_{\texttt{Plurality}}(n) \\ \lim_{n\to\infty} p_{\texttt{Plurality}}(n) &= 1 \end{aligned}$$

kde $p_{\texttt{Plurality}}(n)$ je pravděpodobnost, že získání pravdy při volbě `Plurality`.

- Pravděpodobně první matematická analýza „moudrosti davů“.
- Čím jsou skupiny větší, tím přesnější jejich odhad je.
- Majorita je přesnější než odhad jednotlivce.
- Nekonečně velké skupiny mají dokonalou přesnost.

Co bychom po dnešku měli znát

- Volba ze dvou alternativ.
- Mayova věta z roku 1952.
- Condorcet jury z roku 1785.