Volby a volební systémy (NI-VOL), Přednáška č. 4

Věty o nemožnosti: Arrowova věta

Dušan Knop

Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze
https://courses.fit.cvut.cz/NI-VOL/

LS 2024/2025,

(Verze dokumentu: 11. 3. 2025 09:55)

Volby

Definice

Volby jsou uspořádaná dvojice $\mathcal{E} = (C, V)$, kde

- C je konečná množina **kandidátů (alternativ)**, $|C| = m \geq 2$ a
- V je konečná a neprázdná množina **voličů (agentů)**, $|V| = n$.

Množinu všech lineárních uspořádání na množině C značíme $\mathcal{L}(C)$. **Profil preferencí** $\mathscr{P} = (p_{v_1}, \ldots, p_{v_n})$ plně charakterizuje volby $\mathcal{E}$.

Volby vítěze(ů) Cílem je naleznout neprázdnou množinu vítězných alternativ $W \subseteq C$. Ideálně samo sebou $|W| = 1$.

Definice

Nechť jsou (C, V) dány. **Volební pravidlo** je funkce

$$f \colon \mathcal{L}(C)^V \to 2^C \setminus \emptyset\,.$$

Opakování

Definice

Volební pravidlo f je **Pareto konzistentní**, pokud pro každý preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ a každé $x \in C$ platí, že pokud existuje $y \in C$ takové, že $y \succ_v x$ pro každého voliče $v \in V$, potom $x \notin f(\mathscr{P})$.

Definice

Volební pravidlo f je **nezávislé na irelevantních alternativách**, pokud pro každý preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ a jeho rozšíření $\mathscr{P}' = \mathscr{P} \cup \{c\}$, $c \notin C$, (tj. pouze vložíme novou alternativu c, ale jinak zachováme veškeré vztahy u všech voličů), pak pravidlo f vrací $x \succeq_{f(\mathscr{P})} y$, pokud $x \succeq_{f(\mathscr{P}')} y$ pro libovolné $x, y \in C$.

Arrowova věta

Definice

Nechť jsou (C, V) dány. **Funkce společenské volby** (social choice function) je funkce

$$f : \mathcal{L}(C)^V \to \mathcal{L}(C)\,.$$

Věta (Arrow)

Nechť $|C| > 2$. Neexistuje volební systém (SCF) založený na preferencích, který je zároveň

1. nediktátorský,
2. Pareto konzistentní a
3. nezávislý na irelevantních alternativách.

Lemma

Nechť $|C| > 2$. Nechť alternativa $b \in C$ je v každém hlasu buď nelepší nebo nejhorší. Potom každá SCF, která splňuje PK a IIA má b jako nejlepší či jako nejhorší.

Důkaz.

- Sporem: Nechť existuje profil $\mathscr{P}$ a alternativy $a, c \in C$ a SCF $a \succ b \succ c$.
- Definuj nový profil $\mathscr{P}'$ tak, že
  - posuneš c na pozici těsně před a v každém hlasu, kde byl za a.
- Protože relativní pořadí ab i bc je shodné v $\mathscr{P}$ i $\mathscr{P}'$, musí na $\mathscr{P}'$ být zachováno $a \succ b \succ c$.
- Zároveň ve **všech hlasech** v $\mathscr{P}'$ máme $c \succ_v a$ a tedy Pareto konzistence diktuje $c \succ a$ v agregované SCF.
- Spor – výsledná relace na $\mathscr{P}'$ není tranzitivní. $\square$

Příprava na důkaz

- Vezmi volby (C, V) a SCF $\mathcal{R}$.
- Přidej nového kandidáta $b \notin C$ do profilu na konec všech hlasů.
- Žádné relativní pořadí se nezměnilo a b je jistě nejhorší v $\mathcal{R}$.
- Zafizujeme pořadí $v_1, v_2, \ldots, v_n$ na V a budeme měnit tento profil $\mathscr{P}$ tak, že budeme postupně dávat b na nejlepší pozici. Ve v_1, poté v_2 a tak dále.
- Pokud bychom změnili všechny, bude $\mathcal{R}$ hodnotit b jako nejlepší.

Pozorování

Existuje volič $v^* \in V$ takový, že

1. b je nejhorší v $\mathcal{R}$ před změnou pro v^*, ale
2. b je nejlepší v $\mathcal{R}$ po změně pro v^*.

$\mathscr{P}_1$ profil před změnou ve v^*

$\mathscr{P}_2$ profil po změně ve v^*

v^* je diktátor

Vezmi libovolné $a, c \in C \setminus \{b\}$.

- Nechť $\mathscr{P}_a$ je profil, který vznikne z $\mathscr{P}_2$ posunutím a před b ve hlasu v^*. Dále dovolíme hlasům z $V \setminus \{v^*\}$ změnit svůj hlas libovolným způsobem pro pořadí a, c, ale musí zachovat pozici b.
- IIA: V $\mathscr{P}_a$ je $a \succ_{\mathcal{R}} b$, protože relativní pořadí mezi ab je shodné s $\mathscr{P}_1$.
- IIA: V $\mathscr{P}_a$ je $b \succ_{\mathcal{R}} c$, protože relativní pořadí mezi bc je shodné s $\mathscr{P}_2$.
- Tranzitivita pro $\mathscr{P}_a$: $a \succ_{\mathcal{R}} c$.
- Ale jediný, kdo toto s jistotou říká je v^*!
- Plus máme dostatek alternativ a můžeme tvořit $\mathcal{Q}_1$ a $\mathcal{Q}_2$ založené na kandidátu c namísto b.

Arrowova věta

Věta (Arrow)

Nechť $|C| > 2$. Neexistuje volební systém (SCF) založený na preferencích, který je zároveň

1. nediktátorský,
2. nerestringovaná doména (všechny profily možné),
3. slabě Pareto konzistentní (každý preferuje) a
4. IIR (pokud relativní pořadí xy je stejné na celém profilu, pak i ve výsledku).

Definice

Množina voličů $\widehat{V} \subseteq V$ je **téměř rozhodná pro** x **proti** y, pokud

1. každý $v \in \widehat{V}$ preferuje x před y a
2. každý $v \in V \setminus \widehat{V}$ preferuje y před x,

implikuje, že x je preferované před y v SCF.

Definice

Množina voličů $\widehat{V} \subseteq V$ je **rozhodná pro** x **proti** y, pokud

1. každý $v \in \widehat{V}$ preferuje x před y

implikuje, že x je preferované před y v SCF.

$D_v(x, y)$ pokud $v \in V$ samotný je téměř rozhodný pro x proti y

$\overline{D_v(x, y)}$ pokud $v \in V$ samotný je rozhodný pro x proti y

$\overline{D_v(x, y)} \Rightarrow D_v(x, y)$.

Klíčové lemma

Lemma

Pokud existuje $v \in V$, který je téměř rozhodný pro nějaké dvě alternativy x, y pro funkci splňující

1. nerestringovaná doména (všechny profily možné),
2. slabě Pareto konzistentní (každý preferuje) a
3. IIR (pokud relativní pořadí xy je stejné na celém profilu, pak i ve výsledku),

potom v je diktátor.

- Využíváme nerestringovanáou doménu a prozkoumáme několik profilů.
- Značíme $\overline{v} \in V \setminus \{v\}$.
- Ukážeme, jak rozhodování pro dvojici rozšířit na trojici. Toto lze dále triviálně rozšířit na celé C.Ukážeme, jak rozhodování pro dvojici rozšířit na trojici. Toto lze dále triviálně rozšířit na celé C.

1. Co se stane, když
   $x \to y \to z$ v má $x \succ y \succ z$, ale
   $x \leftarrow y \to z$ $\overline{v}$ mají $y \succ x$ i $y \succ z$ (tedy $y \succ_{\overline{v}} \{x, z\}$)

Nijak nespecifikujeme vztahy mezi x a z pro $\overline{v}$!

- podle v dostáváme $x \succ_{\mathcal{R}} y$
- ze slabé Pareto konzistence dostaneme, že $y \succ_{\mathcal{R}} z$
- z tranzitivity pak $\underline{x \succ_{\mathcal{R}} z}$
- Tedy $D_v(x, y) \Rightarrow \overline{D_v(x, z)} \Rightarrow D_v(x, z)$.

2. Co se stane, když
   $z \to x \to y$ v má $z \succ x \succ y$, ale
   $z \to x \leftarrow y$ $\overline{v}$ mají $z \succ x$ i $y \succ x$

- ze slabé Pareto konzistence dostaneme, že $z \succ_{\mathcal{R}} x$
- dále podle v: $x \succ_{\mathcal{R}} y$
- z tranzitivity pak $\underline{z \succ_{\mathcal{R}} y}$
- Tedy $D_v(x, y) \Rightarrow \overline{D_v(z, y)} \Rightarrow D_v(z, y)$.

3. Co se stane když
   $y \to x \to z$ v má $z \succ x \succ y$, ale
   $y \to x \leftarrow z$ $\overline{v}$ mají $z \succ x$ i $y \succ x$
   - $y \succ_{\mathcal{R}} x, x \succ_{\mathcal{R}} z \Rightarrow y \succ_{\mathcal{R}} z$ a $D_v(x,z) \Rightarrow \overline{D_v(y,z)} \Rightarrow D_v(y,z)$.
4. Co se stane když
   $y \to z \to x$ v má $y \succ z \succ x$, ale
   $y \leftarrow z \to x$ $\overline{v}$ mají $z \succ x$ i $z \succ x$
   - $y \succ_{\mathcal{R}} z, z \succ_{\mathcal{R}} x \Rightarrow y \succ_{\mathcal{R}} x$ a $D_v(y,z) \Rightarrow \overline{D_v(y,x)} \Rightarrow D_v(y,x)$.
5. Co se stane když
   $z \to y \to x$ v má $z \succ y \succ x$, ale
   $z \to y \leftarrow x$ $\overline{v}$ mají $z \succ x$ i $y \succ x$
   - $z \succ_{\mathcal{R}} y, y \succ_{\mathcal{R}} x \Rightarrow z \succ_{\mathcal{R}} x$ a $D_v(y,x) \Rightarrow \overline{D_v(z,x)} \Rightarrow D_v(z,x)$.
6. Co se stane když
   $x \to z \to y$ v má $x \succ z \succ y$, ale
   $x \leftarrow z \to y$ $\overline{v}$ mají $z \succ x$ i $z \succ y$
   - $x \succ_{\mathcal{R}} z, z \succ_{\mathcal{R}} y \Rightarrow x \succ_{\mathcal{R}} y$ a $D_v(x,z) \Rightarrow \overline{D_v(x,y)} \Rightarrow D_v(x,y)$.

Důkaz použitím lemmatu

- Lemma v podstatě říká, že aby věta neplatila, nesmíme mít žádné téměř rozhodné individuum (pro žádnou dvojici alternativ).
- Ale nějaká rozhodná množina pro xy existuje.
  - celé V je jistě rozhodné (slabé Pareto)
  - polož V_{xy} **nejmenší** téměř rozhodnou množínu voličů pro x před y
  - rozděl V na
    - $W_2 := V \setminus V_{xy}$
    - $v \in V_{xy}$
    - $W_1 := V_{xy} \setminus \{v\}$
- Zvaž profil
  - v preferuje x před y před z
  - $w_1 \in W_1$ preferuje z před x před y
  - $w_2 \in W_2$ preferuje y před z před x
  - Dostaneme, že $x \succ_{\mathcal{R}} y$.
  - Může nyní nastat $z \succ_{\mathcal{R}} y$?

Co bychom po dnešku měli znát

- Dvě verze Arrowovy věty.
- A hlavně jejich důkazy.
- Důkazů Arrowových vět lze najít nepřeberné množství
  - Zkoumají různé úhly pohledu
  - Ukazují různé přístupy a „zneužití“ kombinací vlastností.
- Mnoho podobných vět – Impossibility Theorems.