Volby a volební systémy (NI-VOL), Přednáška č. 5

Věty o nemožnosti: G-S věta

Dušan Knop

Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze
https://courses.fit.cvut.cz/NI-VOL/

LS 2024/2025,

(Verze dokumentu: 18. 3. 2025 10:50)

Volby

Definice

Volby jsou uspořádaná dvojice $\mathcal{E} = (C, V)$, kde

- C je konečná množina **kandidátů (alternativ)**, $|C| = m \geq 2$ a
- V je konečná a neprázdná množina **voličů (agentů)**, $|V| = n$.

Množinu všech lineárních uspořádání na množině C značíme $\mathcal{L}(C)$.
Profil preferencí $\mathscr{P} = (p_{v_1}, \ldots, p_{v_n})$ plně charakterizuje volby $\mathcal{E}$.

Volby vítěze(ů) Cílem je naleznout neprázdnou množinu vítězných alternativ $W \subseteq C$. Ideálně samo sebou $|W| = 1$.

Definice

Nechť jsou (C, V) dány. **Volební pravidlo** je funkce

$$f \colon \mathcal{L}(C)^V \to 2^C \setminus \emptyset \,.$$

Opakování

Definice

Volební pravidlo f je **rezolutní**, pokud pro každý preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ platí $|f(\mathscr{P})| = 1$.

Definice

Volební pravidlo f je **nevynucené** (též **občansky svrchované**), pokud pro každého kandidáte $c \in C$ existuje nějaký preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ takový, že $c \in f(\mathscr{P})$. V opačném případě hovoříme o **vynuceném** pravidle.

Definice

Volební pravidlo f je **odolné na strategii**, pokud pro žádné preferenční profil $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(C)^V$ a žádného voliče $v \in V$ neexistuje $\mathscr{P}'$ lišící se od $\mathscr{P}$ pouze v hlasu voliče v takový, že $f(\mathscr{P}') \succ_v f(\mathscr{P})$.

Strategické hlasování

Římský senát

- Budeme hlasovat pomocí `Plurality` na následujícím profilu:

$$102: \ a \succ b \succ c \qquad 101: \ b \succ a \succ c \qquad 100: \ c \succ b \succ a$$

- Jistě vyhraje alternativa a.
- Co kdyby poslední skupina voličů raději „prohodila“ b a c?

$$102: \ a \succ b \succ c \qquad 101: \ b \succ a \succ c \qquad 100: \ b \succ c \succ a$$

- Pak vyhraje b (čímž si tato skupinka polepšila).
- Nejen oni ale, polepšilo si celkem 201 voličů.
- Jedná se o skupinovou manipulaci.

Borda

- Mějme následující profil

$$\begin{aligned} 2 &: \ a \succ b \succ c \succ d \succ e \\ 3 &: \ d \succ e \succ b \succ c \succ a \\ 2 &: \ e \succ c \succ a \succ d \succ b \end{aligned}$$

- Borda skóre jsou po řadě 12, 12, 13, 16, 17. Vyhraje tedy e.
- Pro poslední dva voliče se ale jedná o nejhorší alternativu!
- Co když jeden z nich hlasuje raději $d \succ a \succ b \succ c \succ e$?

$$\begin{aligned} 2 &: \ a \succ b \succ c \succ d \succ e \\ 3 &: \ d \succ e \succ b \succ c \succ a \\ 1 &: \ e \succ c \succ a \succ d \succ b \\ 1 &: \ d \succ a \succ b \succ c \succ e \end{aligned}$$

- Skóre jsou 11, 12, 12, 18, 17. Vyhraje tedy d.
- Dle skutečnosti ale tento volič preferuje d před e!

Gibbard & Satterthwaite věta

Věta

Pro $|C| \geq 3$ neexistuje žádný volební systém založený na preferencích, který je zároveň:

1. nediktátorský,
2. rezolutní,
3. občansky svrchovaný a
4. odolný na strategii.

Definice

Buď f rezolutní pravidlo, (C, V) volby a $x, y \in C$ různé alternativy. Koalice voličů $X \subseteq V$ je **blokující pro** y **ve prospěch** x, pokud

$$\forall \mathscr{P} \in \mathcal{L}(C) : X \text{ preferuje } x \text{ před } y \ \Rightarrow y \notin f(\mathscr{P})\,.$$

Koalice je **blokující**, pokud je blokující pro všechny dvojice.

Pomocné lemma

Lemma

Nechť (C, V) jsou volby. Nechť dále je f volební pravidlo, které je rezolutní a odolné na strategii. Potom f je

1. monotónní,
2. nezávislé a
3. pokud f je navíc občansky svrchované, potom je Pareto konzistentní.

Definice

Volební pravidlo f je **nezávislé**, pokud pro libovolné dva profily $\mathscr{P}, \mathscr{P}'$ a alternativy x, y takové, že $N^{xy}_{\mathscr{P}} = N^{xy}_{\mathscr{P}'}$ když nastane $x \in f(\mathscr{P})$ a zároveň $y \notin f(\mathscr{P})$, potom nutně $y \notin f(\mathscr{P}')$.

- Ukážeme 1) a 2).
- Vlastnost 3) ponecháváme jako cvičení.

Důkaz 1).

- Sporem: Potom existují různé alternativy x, y a profily $\mathscr{P}, \mathscr{P}'$ takově, že ($\mathscr{P}'$ vznikne z $\mathscr{P}$ zlepšením pozice x v některých hlasech)
  - $N^{xy}_{\mathscr{P}} \subseteq N^{xy}_{\mathscr{P}'}$ pro všechna $y \in C \setminus \{x\}$
  - $N^{yz}_{\mathscr{P}} = N^{yz}_{\mathscr{P}'}$ pro všechna $y, z \in C \setminus \{x\}$ a
  - $f(\mathscr{P}) = \{x\}$ ale $x \notin f(\mathscr{P}')$.
- Nechť tedy $\{z\} = f(\mathscr{P}')$.
- Povšimněme si, že se mezi $\mathscr{P}$ a $\mathscr{P}'$ mohlo změnit hodně hlasů.
- Podobně jako minule – měníme jeden po druhém a čekáme až změna $x \to z$ nastane. Búno $\mathscr{P}$ a $\mathscr{P}'$ jsou přímo tyto profily.
- Potom pro $\{v\} = N^{xy}_{\mathscr{P}} \cap N^{yx}_{\mathscr{P}'}$ dostáváme:

  $x \succ_v z$ v může v $\mathscr{P}'$ manipulovat na $\mathscr{P}$.

  $z \succ_v x$ v může v $\mathscr{P}$ manipulovat na $\mathscr{P}'$.
- Závěrem: f je manipulovatelné. $\square$

Důkaz 2).

- Sporem: Nechť tedy existují profily $\mathscr{P}, \mathscr{P}'$ a různé alternativy x, y takové, že $N^{xy}_{\mathscr{P}} = N^{xy}_{\mathscr{P}'}$, ale $x \in f(\mathscr{P})$ a $y \in f(\mathscr{P}')$.
- Musí tedy existovat nějaký volič v, pro kterého $\succeq_v \neq \succeq'_v$.
- Opět búno $\mathscr{P}$ a $\mathscr{P}'$ se liší pouze ve v.
- Opět rozebereme dvě možnosti:

  $x \succ_v y$ v může v $\mathscr{P}'$ manipulovat na $\mathscr{P}$.

  $y \succ_v x$ v může v $\mathscr{P}$ manipulovat na $\mathscr{P}'$.
- Závěrem: f je manipulovatelné. $\square$

Lemma

Buď f rezolutní, občansky svrchované pravidlo odolné na strategii a (C, V) volby. Potom množina $\mathcal{B}$ všech blokujících koalic splňuje

1. $V \in \mathcal{B}$,
2. $X \in \mathcal{B}$ právě tehdy, když $(V \setminus X) \notin \mathcal{B}$
3. pokud $X, Y \in \mathcal{B}$, potom také $X \cap Y \in \mathcal{B}$.

Důkaz 1).

- Pro alternativu x musí existovat profil $\mathscr{P}$, že $f(\mathscr{P}) = \{x\}$.
- Z $\mathscr{P}$ vytvoř $\mathscr{P}'$ tak, že posuneš x na první pozice.
- Tedy $N^{xy}_{\mathscr{P}'} = V$ pro všechna $y \in C \setminus \{x\}$.
- Potom $f(\mathscr{P}') = \{x\}$ (odolný na strategii – jinak dám x „zpět“ a získám lepšího vítěze).
- Tedy $V \in \mathcal{B}$. $\square$

Důkaz 2) $\Rightarrow$.

- Pro spor uvaž X a $\overline{X} = V \setminus X$ takové, že $X, \overline{X} \in \mathcal{B}$.
- Uvažme profil $\mathscr{P}$ takový, že v každém hlasu je x, y na dvou nejlepších pozicích a navíc $X = N^{xy}_{\mathscr{P}}$ a $\overline{X} = N^{yx}_{\mathscr{P}}$.
- Co ale zvolí $f(\mathscr{P})$? Speciálně: může zvolit x (nebo y)?
- Nemůže, tedy zvolí nějaké $z \in C \setminus \{x, y\}$.
- No ale to odporuje občanské svrchovanosti (resp. Pareto konzistenci)—spor. $\square$

Důkaz 2) $\Leftarrow$.

- Nechť $\overline{X} \notin \mathcal{B}$.
- Potom existuje $\mathscr{P}$, že $\overline{X} \subseteq N^{xy}_{\mathscr{P}}$ a zároveň $f(\mathscr{P}) = \{y\}$.
- Víme, že pro libovolný $\mathscr{P}'$, kde $N^{xy}_{\mathscr{P}} = N^{xy}_{\mathscr{P}'}$ máme $f(\mathscr{P}) = \{y\}$.
- Potom ale $N^{yx}_{\mathscr{P}}$ je blokující pro x proti y.
- Pak ale (obdobně jako u Arrow) $C \in \mathcal{B}$. $\square$

Důkaz 3).

- Pro spor uvaž $X, Y \in \mathcal{B}$ takové, že $X \cap Y \notin \mathcal{B}$.
- Dle předchozího dostáváme, že $\overline{X \cap Y} \in \mathcal{B}$.
- Konstruujme profil $\mathscr{P}$ tak, že
  - Všechny hlasy mají jako 3 top varianty x, y, z.
  - Relativní uspořádání těchto je následující

$$X \cap Y: \ x \succ y \succ z \qquad Y \setminus X: \ y \succ z \succ x$$
$$X \setminus Y: \ z \succ x \succ y \qquad \overline{X \cup Y}: \ z \succ y \succ x$$

- Dostáváme
  - $X = (X \cap Y) \cup (X \setminus Y)$ je blokující: $x \succ_X y$ a tedy $y \notin f(\mathscr{P})$.
  - $Y = (X \cap Y) \cup (Y \setminus X)$ je blokující: $y \succ_Y z$ a tedy $z \notin f(\mathscr{P})$.
  - $\overline{X \cap Y} = \overline{X \cup Y} \cup (Y \setminus X) \cup (X \setminus Y)$ je blokující: $z \succ_{\overline{X \cap Y}} x$ a tedy $x \notin f(\mathscr{P})$.
- Ale tedy vyhraje alternativa, která je dominovaná $\{x, y, z\}$ a my dostáváme spor. $\square$

Důkaz věty z Lemmatu

Lemma

Buď f rezolutní, občansky svrchované pravidlo odolné na strategii a (C, V) volby. Potom množina $\mathcal{B}$ všech blokujících koalic splňuje

1. $V \in \mathcal{B}$,
2. $X \in \mathcal{B}$ právě tehdy, když $(V \setminus X) \notin \mathcal{B}$
3. pokud $X, Y \in \mathcal{B}$, potom také $X \cap Y \in \mathcal{B}$.

- Chceme (opět) ukázat, že $\mathcal{B}$ obsahuje singleton – jak?
- Vezmi $\cap\mathcal{B}$ (tj. „uzávěr“ $\mathcal{B}$ na konečné průniky).
- Uzávěr dle vlastnosti 3) náleží do $\mathcal{B}$.
- Speciálně tedy $\cap\mathcal{B} \neq \emptyset$, protože $V \in \mathcal{B}$ a vlastnost 2).
- Uvažme tedy, že $v \in \cap\mathcal{B}$ a naším cílem je ukázat, že $\{v\} = \cap\mathcal{B}$.
- Nechť tedy pro spor $\{v\} \notin \mathcal{B}$:
  - Z vlastnosti 2) ale platí, že $\overline{\{v\}} = V \setminus \{v\} \in \mathcal{B}$.
  - Potom ale nemůže nastat $v \in \cap\mathcal{B}$ – spor.
- Závěrem tedy $\{v\} = \cap\mathcal{B}$. $\square$

Co bychom po dnešku měli znát

- Motivace strategického hlasování.
- Důkaz Gibbard & Satterthwaite věty.
- Speciálně formalizování myšlenky ultrafiltru.