

Volby a volební systémy (NI-VOL), Přednáška č. 6

Strukturované preference

Dušan Knop

Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze
<https://courses.fit.cvut.cz/NI-VOL/>



LS 2024/2025,

(Verze dokumentu: 25. 3. 2025 10:51)

Volby

Definice

Volby jsou uspořádaná dvojice $\mathcal{E} = (C, V)$, kde

- C je konečná množina **kandidátů (alternativ)**, $|C| = m \geq 2$ a
- V je konečná a neprázdna množina **voličů (agentů)**, $|V| = n$.

Množinu všech lineárních uspořádání na množině C značíme $\mathcal{L}(C)$.

Profil preferencí $\mathcal{P} = (p_{v_1}, \dots, p_{v_n})$ plně charakterizuje volby \mathcal{E} .

Volby vítěze(ů) Cílem je naleznout neprázdную množinu vítězných alternativ $W \subseteq C$. Ideálně samo sebou $|W| = 1$.

Definice

Nechť jsou (C, V) dány. **Volební pravidlo** je funkce

$$f: \mathcal{L}(C)^V \rightarrow 2^C \setminus \emptyset.$$

Restrikce domény

Restrikcí domény myslíme libovolné omezení množiny $\mathcal{L}(C)$.

Definice (Single Peaked)

Doména pro (C, V, \mathcal{P}) je **single-peaked**, pokud existuje lineární uspořádání \triangleleft na C takové, že pro každého voliče $v \in V$ platí, pokud $c \in C$ je top \succ_v a $x, y \in C$ jsou takové, že $x \triangleleft y \triangleleft c$ nebo $c \triangleleft y \triangleleft x$, pak nutně $y \succ_v x$.

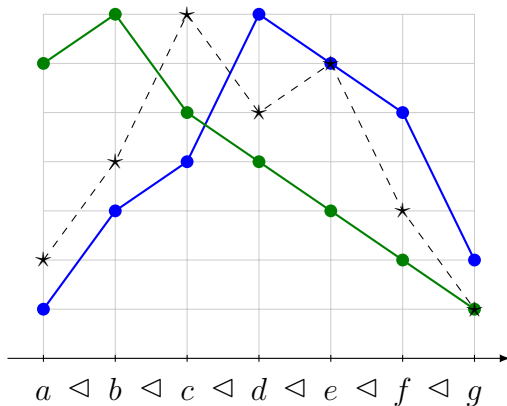
- Tedy pokud porovnáváme dvě alternativy „na stejné straně od nejlepší volby“, pak volič preferuje tu blíže k nejlepší.
- Alternativně lze zavést tak, že nejlepších k alternativ vždy tvoří podél osy \triangleleft interval.

Definice (Dědičné domény (Hereditary))

Restrikce domény X je **dědičná**, pokud pro každý její profil \mathcal{P} a každý \mathcal{P}' , který z \mathcal{P} vznikne smazáním voliče či alternativy, také \mathcal{P}' náleží do X .

Single-peaked

v_1	v_2	v_3
b	d	c
a	e	e
c	f	d
d	c	b
e	b	f
f	g	a
g	a	g



- Zelený v_1 a modrý v_2 hlas jsou pro \triangleleft single-peaked.
- Neexistuje žádné pořadí alternativ takové, aby v něm v_1 a v_3 byli single-peaked.

Condorcet je odolný na strategii

Tvrzení

Pravidlo Condorcet je odolné na strategii.

Důkaz.



Mediánový volič

Tvrzení (Median Voter Theorem)

Každý single-peaked profil má slabého Condorcet vítěze.

Důkaz.

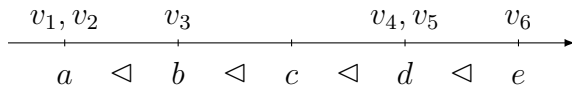


Mediánový volič – příklad

- Mějme uspořádaní alternativ $a \triangleleft b \triangleleft c \triangleleft d \triangleleft e$.
- Voliče v_1, \dots, v_6 s topy a, a, b, d, d, e .
- Tedy platí:

$$\top(v_1) \trianglelefteq \top(v_2) \trianglelefteq \top(v_3) \trianglelefteq \top(v_4) \trianglelefteq \top(v_5) \trianglelefteq \top(v_6).$$

- Máme $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = 3$ a $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil = 4$.
- Alternativy b, c, d jsou tedy slabými Condorceho vítězy (nacházejí se mezi b nejlepší volbou v_3 a d nejlepší volbou v_4).



Důsledek

Pokud má single-peaked profil lichý počet voličů, pak je jeho majoritní relace tranzitivní.

Důkaz.



Tvrzení (Uzavřenost S-P)

Pokud má single-peaked profil s osou \triangleleft lichý počet voličů, pak je jeho majoritní relace \succ_{maj} také single-peaked pro \triangleleft .

Důkaz.



Single Crossing

Definice

Profil \mathcal{P} voličů v_1, \dots, v_n je v tomto pořadí **single crossing**, pokud pro každé dvě alternativy $a, b \in C$ jsou množiny

- 1 $\{i \in [n] \mid a \succ_i b\}$ a
- 2 $\{i \in [n] \mid b \succ_i a\}$

intervaly v $[n]$. Profil je **single crossing**, pokud existuje pořadí voličů vůči kterému je single crossing v daném pořadí.

Co bychom po dnešku měli znát

