

Volby a volební systémy (NI-VOL), Přednáška č. 8

Určování vítěze

Dušan Knop

Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze
<https://courses.fit.cvut.cz/NI-VOL/>



LS 2024/2025,

(Verze dokumentu: 15. 4. 2025 10:38)

Volby

Definice

Volby jsou uspořádaná dvojice $\mathcal{E} = (C, V)$, kde

- C je konečná množina **kandidátů (alternativ)**, $|C| = m \geq 2$ a
- V je konečná a neprázdná množina **voličů (agentů)**, $|V| = n$.

Množinu všech lineárních uspořádání na množině C značíme $\mathcal{L}(C)$.

Profil preferencí $\mathcal{P} = (p_{v_1}, \dots, p_{v_n})$ plně charakterizuje volby $\mathcal{E}$.

Volby vítěze(ů) Cílem je najít neprázdnou množinu vítězných alternativ $W \subseteq C$. Ideálně samo sebou $|W| = 1$.

Definice

Nechť jsou (C, V) dány. **Volební pravidlo** je funkce

$$f: \mathcal{L}(C)^V \rightarrow 2^C \setminus \emptyset.$$

Složitost určení vítěze

P skorovací protokoly, Copeland, STV, ...
 $P_{||}^{NP}$ -úplné Dodgson, Young, Kemeny

Co když nemáme úplnou informaci?

- Tři kamarádky Anna, Belle a Chris chtějí společnou dovolenou.
 - Mají 4 možnosti dopravního prostředku: loď, auto, letadlo nebo vlak.
 - Anna by nejraději letěla a kdyby to nešlo, tak lodí, dále auto a poté vlak.
 - Belle říká, že auto i vlak jsou jistě lepší než loď či letadlo.
 - Chris by nejraději jela lodí, pokud by to nešlo, tak autem či letadlem, jako nejhorší vidí vlak.
-
- Vítěze určí pomocí pravidla Borda.
 - Existuje možnost, aby Anna prosadila své oblíbené letadlo?

Co když nemáme úplnou informaci?

$A :$ letadlo $\succ$ loď $\succ$ auto $\succ$ vlak

$B :$ $\{\text{auto, vlak}\} \succ \{\text{letadlo, loď}\}$

$C :$ loď $\succ \{\text{auto, letadlo}\} \succ$ vlak

- Vítěze určí pomocí pravidla Borda.
- Existuje možnost, aby Anna prosadila své oblíbené letadlo?

Belle Co tak kdyby jsi preferovala letadlo před lodí?

Belle Co tak kdyby jsi auto před vlakem?

Chris Chris – pro Borda se musím rozhodnout a podle mě je letadlo nakonec lepší než auto.

$A :$ letadlo $\succ$ loď $\succ$ auto $\succ$ vlak

$B :$ auto $\succ$ vlak $\succ$ letadlo $\succ$ loď

$C :$ loď $\succ$ letadlo $\succ$ auto $\succ$ vlak

- Která možnost tedy vyhraje?

Formálně

$\mathcal{E}$ -POSSIBLE WINNER

Vstup Volby (C, V) , kde V mají částečná uspořádání na C a kandidát $p \in C$.

Otázka Existuje rozšíření V na lineární uspořádání takové, že c je v něm vítězem podle pravidla $\mathcal{E}$?

- Pokud je určení vítěze pro $\mathcal{E}$ v P, pak je $\mathcal{E}$ -POSSIBLE WINNER v NP.

$\mathcal{E}$ -NECESSARY WINNER

Vstup Volby (C, V) , kde V mají částečná uspořádání na C a kandidát $p \in C$.

Otázka Je proavda, že pro všechna lineární uspořádání na V rozšiřující vstupní uspořádání je c vítězem podle pravidla $\mathcal{E}$?

Condorcet

Věta

POSSIBLE WINNER je v P pro Condorceho vítěze.

Shrnutí složitosti

	Possible Winner	Necessary Winner
Condorcet	P	P
Plurality	P	P
Veto	P	P
Borda	NP-úplné	P
Simpson	NP-úplné	P
Bucklin	NP-úplné	P
Copeland	NP-úplné	coNP-úplné
STV	NP-úplné	coNP-úplné

Manipulace přidáváním kandidátů

Věta

POSSIBLE COWINNER ADDITION NEW CANDIDATES je NP-úplný pro skórovací protokoly s vektory tvaru $(\alpha_1, \alpha_2, 1, 0, \dots, 0)$ pokud přidáváme jednoho nového kandidáta.

Co bychom po dnešku měli znát