Volby a volební systémy (NI-VOL), Přednáška č. 9

ABC – Approval Based Committee

Dušan Knop

Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze
https://courses.fit.cvut.cz/NI-VOL/

LS 2024/2025,

(Verze dokumentu: 22. 4. 2025 10:35)

Dnes – Volby chci/nechci

Definice

Každý volič $v \in V$ vyjadřuje své preference p_v.

Schvalovací preference volič schvaluje (vyjadřuje podporu) množině alternativ $p_v \subseteq C$

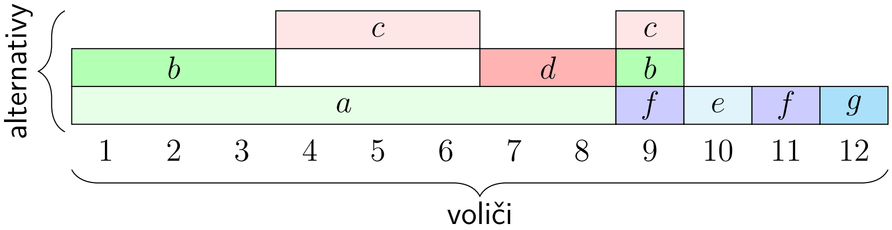
Ordinální preference p_v je lineární uspořádání na C; píšeme $a \succeq_v b$ pokud volič v shledává alternativu a striktně preferovanou či shodnou s alternativou b.

Victor D'Hondt	☒
Gustaf Eneström	☐
Vilfredo Pareto	☐
L. Edvard Phragmén	☒
Thorvald N. Thiele	☐

Příklad

Na univerzitě vybíráme čtyřčlenou komisi. Vybíráme ze 7 kandidátů $C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ a volí celkem 12 členů učené společnosti:

$$
\begin{array}{llll}
A(1)\colon \{a, b\} & A(2)\colon \{a, b\} & A(3)\colon \{a, b\} & A(4)\colon \{a, c\} \\
A(5)\colon \{a, c\} & A(6)\colon \{a, c\} & A(7)\colon \{a, d\} & A(8)\colon \{a, d\} \\
A(9)\colon \{b, c, f\} & A(10)\colon \{e\} & A(11)\colon \{f\} & A(12)\colon \{g\}.
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{llll}
3 \times \{a, b\} & 3 \times \{a, c\} & 2 \times \{a, d\} & 1 \times \{b, c, f\} \\
1 \times \{e\} & 1 \times \{f\} & 1 \times \{g\}. &
\end{array}
$$

Multiwinner AV

Budeme volit k kandidátů z m možných. **AV-skóre** kandidáta $c \in C$ je $\mathrm{score}_{AV}(V,c) = |N(c)| = |\{v \in V \mid c \in A(v)\}|$. Pravidlo AV vybere ty komise $W \in \binom{C}{k}$, které mazimalizují $\mathrm{score}_{AV}(V,W) = \sum_{c \in W} \mathrm{score}_{AV}(V,c)$.

Tedy pro:

$$3 \times \{a,b\} \quad 3 \times \{a,c\} \quad 2 \times \{a,d\} \quad 1 \times \{b,c,f\}$$
$$1 \times \{e\} \quad 1 \times \{f\} \quad 1 \times \{g\}.$$

vybereme $a \mapsto 8, b \mapsto 4, c \mapsto 4, d \mapsto 2, e \mapsto 1, f \mapsto 2, g \mapsto 1$:

$W_1 = \{a,b,c,d\}$ tři nespokojení voliči

$W_2 = \{a,b,c,f\}$ dva nespokojení voliči

Approval Chamberlin–Courant

Budeme volit k kandidátů z m možných. **CC-skóre** komise $W \in \binom{C}{k}$ je $\mathrm{score}_{CC}(V, W) = |\{v \in V \mid W \cap A(v) \neq \emptyset\}|$. Pravidlo CC vybere ty komise $W \in \binom{C}{k}$, které mazimalizují $\mathrm{score}_{CC}(V, W)$.

Tedy pro:

$$\begin{array}{llll} 3 \times \{a, b\} & 3 \times \{a, c\} & 2 \times \{a, d\} & 1 \times \{b, c, f\} \\ 1 \times \{e\} & 1 \times \{f\} & 1 \times \{g\}. & \end{array}$$

vybereme $W = \{a, e, f, g\}$.

- I když W potěší každého voliče, obsahuje alternativy e, g, které jsou každá jen v jednom hlasu.

Obecně

w-Thiele

Budeme volit k kandidátů z m možných. Thieleho metoda je parametrizovaná neklesající funkcí $w\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ splňující $w(0) = 0$. w-**skóre** komise $W \in \binom{C}{k}$ je $\mathrm{score}_w(V, W) = \sum_{v \in V} w(|W \cap A(v)|)$. Pravidlo pak vybere ty komise $W \in \binom{C}{k}$, které mazimalizují $\mathrm{score}_w(V, W)$.

$$\begin{aligned} \text{AV} &\quad \text{pro } w(x) = x \\ \text{CC} &\quad \text{pro } w(x) = \min(1, x) \\ \text{PAV} &\quad \text{pro } w(x) = \textstyle\sum_{j=1}^{x} \frac{1}{j} \end{aligned}$$

Tedy pro:

$$\begin{array}{llll} 3 \times \{a, b\} & 3 \times \{a, c\} & 2 \times \{a, d\} & 1 \times \{b, c, f\} \\ 1 \times \{e\} & 1 \times \{f\} & 1 \times \{g\}. & \end{array}$$

PAV zvolí $W = \{a, b, c, f\}$

Sekvenční pravidla

Fakt

Buď $w \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ neklesající funkce splňující $w(i) - w(i-1) > w(i+1) - w(i)$ pro libovolné $i \in [n]$. Potom je pro vstup $(C, V), k$ a hodnotu s NP-těžké rozhodnout, zda existuje komise se $\mathrm{score}_w \geq s$.

(Reverzní) Sekvenční varianty

Pro libovolnou w-Thiele metodu definujeme její **sekvenční** variantu tak, že začneme s komisí $W_0 = \emptyset$ a v každém kole $r \in [k]$ spočteme komisi $W_r = W_{r-1} \cup \{c\}$, kde c je kandidát maximalizující $\mathrm{score}_{w(V, W_{r-1} \cup \{c\})}$.

Pro libovolnou w-Thiele metodu definujeme její **reverzní sekvenční** variantu tak, že začneme s komisí $W_m = C$ a v každém kole $r \in \{m-1, \ldots, k\}$ spočteme komisi $W_r = W_{r+1} \setminus \{c\}$, kde c je kandidát maximalizující $\mathrm{score}_{w(V, W_{r+1} \setminus \{c\})}$.

Monroe

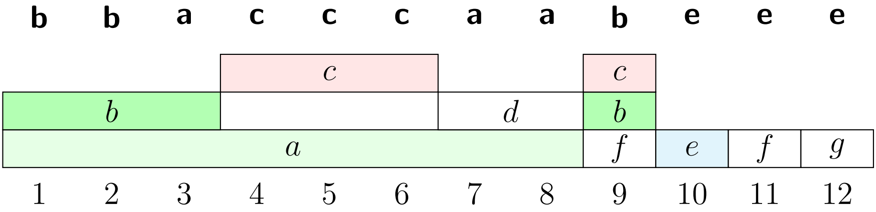
- Pro fixní komisi W definujeme Monroeovo přiřazení jako funkci $\phi\colon V \to W$ takovou, že každému kandidátovi $c \in W$ přiřazuje téměř totožný počet voličů; tedy $\lfloor {}^{n}\!/_{k} \rfloor \leq |\phi^{-1}(c)| \leq \lceil {}^{n}\!/_{k} \rceil$.
- Kandidáta $\phi(v)$ vnímáme jako reprezentanta voliče v.
- Nechť $\Phi(W)$ množina všech možných Monroeových přiřazení pro W.
- Monroe-skóre W je pak definováno jako počet voličů, kteří mají reprezentanta, kterého zároveň schvalují, tedy $\max_{\phi \in \Phi(W)} \left|\{v \in V \mid \phi(v) \in A(v)\}\right|$.
- Opět vracíme všechny komise maximalizující celkové skóre.
- Existuje hladová varianta – Greedy Monroe.

Monroe

Uvažme opět hlasy:

$$A(1)\colon \{a,b\} \quad A(2)\colon \{a,b\} \quad A(3)\colon \{a,b\} \quad A(4)\colon \{a,c\}$$
$$A(5)\colon \{a,c\} \quad A(6)\colon \{a,c\} \quad A(7)\colon \{a,d\} \quad A(8)\colon \{a,d\}$$
$$A(9)\colon \{b,c,f\} \quad A(10)\colon \{e\} \quad A(11)\colon \{f\} \quad A(12)\colon \{g\}.$$

- $n/k = 12/4 = 3$ – budeme členovi komise přiřazovat 3 voliče
- jedno z optimálních je $\phi^{-1}(a) = \{3,7,8\}, \phi^{-1}(b) = \{1,2,9\}, \phi^{-1}(c) = \{4,5,6\}, \phi^{-1}(e) = \{10,11,12\}$
- celkové skore je 10 (0 je za voliče 11 a 12)
- celkem máme 6 vítězných komisí



Phragmén

Cena za kandidáta v komisi je 1 – ta musí být zaplacena jeho podporovateli.

Co bychom po dnešku měli znát