Volby a volební systémy (NI-VOL), Přednáška č. 10

Judgement Aggregation

Dušan Knop

Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze
https://courses.fit.cvut.cz/NI-VOL/

LS 2024/2025, 24. duben 2024

(Verze dokumentu: 20. 4. 2024 18:52)

Dogmatický paradox (Doctrinal paradox)

- Soud se třemi soudci zvažuje případ v oblasti smluvního práva.
- Právní doktrína stanovuje, že žalovaný je odpovědný (r) právě tehdy, když
  - smlouva byla platná (p) a
  - došlo k porušení (q).
- Platí tedy $r \leftrightarrow p \wedge q$.

	p	q	r
Soudce 1	ANO	ANO	ANO
Soudce 2	ANO	NE	NE
Soudce 3	NE	ANO	NE

By měl soud prohlásit žalovaného za odpovědného?

Dogmatický paradox (Doctrinal paradox)

Proč se jedná o paradox?

	p	q	$p \land q$
Agent 1	ANO	ANO	ANO
Agent 2	ANO	NE	NE
Agent 3	NE	ANO	NE
Majorita	ANO	ANO	NE

1. Dvě přirozená pravidla agregace, pravidlo **založené na premisách** a pravidlo **založené na závěrech**, produkují různé výsledky.
2. Každý jednotlivý soud (agent) je **logicky konzistentní**, ale kolektivní soud vrácený (přirozeným) většinovým pravidlem není.

Ve filozofii je toto známo jako **diskurzivní dilema** volby mezi **reaktivitou na názory rozhodovatelů** (respektováním většinových rozhodnutí) a **konzistencí** kolektivních rozhodnutí.

Model

- Nechť $\varphi = \varphi'$, pokud $\varphi = \neg\varphi'$, a nechť $\varphi = \neg\varphi'$ jinak.
- **Agenda** Φ je konečná neprázdná množina formulí (bez dvojité negace), která je uzavřená na doplňky ($\varphi \in \Phi \Rightarrow \varphi \in \Phi$).
- **Soubor soudů** J nad agendou Φ je podmnožinou Φ.
- J nazveme:

  úplný pokud platí $\varphi \in J$ nebo $\varphi \in J$ pro všechna $\varphi \in \Phi$

  bez doplňku pokud platí $\varphi \notin J$ nebo $\varphi \notin J$ pro všechna $\varphi \in \Phi$

  konzistentní pokud existuje přiřazení splňující všechna $\varphi \in J$
- $\mathcal{J}(\Phi)$ je množina všech úplných a konzistentních podmnožin Φ
- Nyní konečná množina agentů $N = \{1, \ldots, n\}$, kde $n > 2$, vyjadřuje své soudy o Φ. Tvoří profil $J = (J_1, \ldots, J_n)$.
- (Resolutní) Pravidlo agregace F pro agendu Φ a množinu n agentů je funkce, která libovolnému profilu úplných a konzistentních individuálních souborů soudů přiřazuje jediný kolektivní soubor soudů
- Formálně $F\colon J(\Phi)^n \to 2^\Phi$.

Model II

- Bylo navrženo několik variant tohoto formuli založeného modelu Judgement Aggregation.
- V modelu binární agregace s integritními omezeními máme:
  - témata (bez interní struktury) místo formulí agendy
  - jedno integritní omezení popisující závislosti mezi tématy

Příklad

- Místo práce s položkami agendy p, q a $p \wedge q$ bychom mohli použít p, q a r.
- Dále budeme mít integritní omezení $r \leftrightarrow p \wedge q$.

- Je také možné kombinovat obě myšlenky a umožnit externí integritní omezení nad složitými formulemi agendy.
- Oba modely jsou a podstatě ekvivalentní, i když existují jemné rozdíly.
- Budeme přecházet mezi modely, když to bude vhodné.

Majorita

- Nechť N_ϕ^J značí koalici příznivců formule ϕ v J.
- Tedy množinu všech agentů, kteří přijímají formuli ϕ v profilu $J = (J_1, \ldots, J_n)$:

$$N_\phi^J := \{i \in N \mid \phi \in J_i\}\,.$$

Striktní většinové pravidlo (Majorita)

(Striktní) většinové pravidlo F_{maj} bere úplný a konzistentní profil souborů soudů jako vstup a vrátí množinu těch tvrzení, které jsou přijaty více než polovinou agentů.

$$F_{\mathrm{maj}} : J(\Phi)^n \to 2^\Phi$$
$$F_{\mathrm{maj}} : J \mapsto \left\{\phi \in \Phi \,\middle|\, |N_\phi^J| > \frac{n}{2}\right\}$$

Majorita – Příklad

- Mějme tři agenty ($N = \{1, 2, 3\}$) vyjadřující soudy
- o agendě $\Phi = \{p, \neg p, q, \neg q, p \vee q, \neg(p \vee q)\}$.

	p	q	$p \vee q$
Agent 1	ANO	NE	ANO
Agent 2	ANO	ANO	ANO
Agent 3	NE	NE	NE
Majorita	ANO	NE	ANO

$J_1 = \{p, \neg q, p \vee q\}$

$J_2 = \{p, q, p \vee q\}$

$J_3 = \{\neg p, \neg q, \neg(p \vee q)\}$

$F_{\text{maj}}(J_1, J_2, J_3) = \{p, \neg q, p \vee q\}$

- Máme $F_{\text{maj}}(J) = \{p, \neg q, p \vee q\}$ (úplné a konzistentní).
- Obecně F_{maj} nemusí být konzistentní (závisí na agendě).

Rozmyslete si:

- F_{maj} garantuje výstup bez doplňku.
- F_{maj} garantuje úplný výstup právě tehdy, když n je liché.

Kvóta

Pravidlo kvóty F_q je definováno funkcí $q\colon \Phi \to \{0, 1, \ldots, n+1\}$:

$$F_q(J) = \left\{\phi \in \Phi \mid |N_\phi^J| \geq q(\phi)\right\} .$$

Pravidlo kvóty F_q je **uniformní**, pokud funkce q zobrazuje libovolnou danou formuli na stejné číslo λ.

- Pravidlo jednomyslnosti (unanimity) F_n přijímá ϕ tehdy a jen tehdy, pokud všichni ano.
- Konstantní pravidlo F_0 (F_{n+1}) přijímá všechny (žádné) formule.
- (Striktní) většinové pravidlo F_{maj} je pravidlo kvóty s $\lambda = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.
- Pravidlo slabé většiny je pravidlo kvóty s $\lambda = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

- Pro liché n většinové pravidlo a pravidlo slabé většiny splývají.
- Pro sudé n se liší (a pouze slabé je úplné).

Kvóta a konzistence

- Intuice: Vysoké kvóty jsou dobré pro konzistenci (ale špatné pro úplnost).
- Povšimněme si, že pravidlo jednomyslnosti je uniformní pravidlo kvóty s $\lambda = n$.
- Agenda doktrinálního paradoxu $\{p, \neg p, q, \neg q, p \wedge q, \neg(p \wedge q)\}$.

Zamyslete se:

- Ukažte, že pravidlo jednomyslnosti zaručuje konzistenci.
- Pro agendu doktrinálního paradoxu a n agentů, jaká je nejnižší uniformní kvóta λ, která stále zaručuje konzistenci?

Agregace na základě premis

- Idea: Při agregaci na základě premis je rozhodování založeno na přijetí či zamítnutí jednotlivých premis, aniž by se bral v potaz výsledek nebo závěr.
- Představme si, že můžeme rozdělit agendu na premisy a závěry:

$$\Phi = \Phi_p \cup \Phi_c \qquad \text{(každá uzavřená na doplňky)}$$

- Potom pravidlo založené na premisách F_{pre} pro Φ_p a Φ_c je:

$$F_{\text{pre}}(J) = \Delta \cup \{\phi \in \Phi_c \mid \Delta \models \phi\} \text{ pro } \Delta = \left\{\phi \in \Phi_p \mid |N_\phi^J| > \frac{n}{2}\right\}.$$

- Běžným předpokladem je, že **premisy = literály**.

Zamyslete se:

- Ukažte, že tento předpoklad zaručuje konzistentní výsledky.
- Zaručuje také úplnost? Na čem záleží?

Pravidlo založené na závěrech je z teoretického hlediska méně atraktivní (protože je neúplné od návrhu), ale často používané v praxi.

Příklad

Předpokládejme, že premisy = literály.

	p	q	r	$p \vee q \vee r$
Agent 1	ANO	NE	NE	ANO
Agent 2	NE	ANO	NE	ANO
Agent 3	NE	NE	ANO	ANO
F_{pre}	NE	NE	NE	NE

- Takže jednomyslně přijatý závěr je kolektivně zamítnut!
- Diskuze: Je to v pořádku?

Volba správného pravidla agregace

- Jak tedy vybrat správné pravidlo agregace?
- Jedním způsobem je použití tzv. axiomatické metody:
  - identifikujte normativně atraktivní vlastnosti pravidel
  - převeďte tyto vlastnosti do matematicky přísných definic
  - zkoumejte důsledky: charakterizace a nemožnosti
- Jakákoli intuitivně přitažlivá a matematicky definovaná vlastnost se nazývá **axiom**.
- Poznámka k rozdílu, jakým je tento termín používán v matematické logice: „zjevně žádoucí“ vs. „zjevně pravdivý“.

Základní axiomy

- Co činí agregační pravidlo F „dobrým“?
- Následující axiomy vyjadřují intuitivně přitažlivé vlastnosti:

Anonymita Zacházejte se všemi agenty symetricky! Pro libovolný profil J a libovolnou permutaci π platí $F(J_1, \dots, J_n) = F(J_{\pi(1)}, \dots, J_{\pi(n)})$.

Neutralita Zacházejte se všemi tvrzeními symetricky! Pro libovolné φ, ψ v agendě Φ a libovolný profil J s $N_\varphi^J = N_\psi^J$ platí $\varphi \in F(J) \to \psi \in F(J)$.

Nezávislost Měli bychom být schopni rozhodovat každém tématu zvlášť! Pro libovolné φ v agendě Φ a libovolné profily J a J_0 s $N_\varphi^J = N_\varphi^{J_0}$ bychom měli mít $\varphi \in F(J) \Leftrightarrow \varphi \in F(J_0)$.

Pozorování

Majorita splňuje všechny tyto axiomy.

Zamyslete se: Ale také některá další pravidla! Můžete uvést příklady?

Jemný rozdíl v terminologii

Definovali jsme úplnost, bezdoplňkovost a konzistenci jako vlastnosti souborů úsudků, ale pak jsme také hovořili o tom, že agregační pravidla mají tyto vlastnosti. Formálně F je:

úplné pokud $F(J)$ je úplňé pro všechna $J \in J(\Phi)^n$

bez doplňků pokud $F(J)$ je bez doplňků pro všechna $J \in J(\Phi)^n$

konzistentní pokud $F(J)$ je konzistentní pro všechna $J \in J(\Phi)^n$

Poznámka

- Někdy jsou tyto vlastnosti agregačních pravidel také označovány jako „axiomy“.
- V jistém technickém smyslu jsou skutečně axiomy, ale raději je nazývám požadavky kolektivní racionality.

Základní věta o nemožnosti

- Viděli jsme, že majorita není konzistentní.
- Může existovat nějaké jiné „rozumné“ pravidlo agregace, které nemá tento problém?
- Překvapivě ne! (alespoň ne pro určité agendy)
- To je hlavní výsledek v původní práci představující formální model JA a navrhující použití axiomatické metody.

Věta (List&Pettit, 2002)

Žádné pravidlo agregace úsudků pro agendu Φ s $\{p, q, p \wedge q\} \subseteq \Phi$, které je anonymní, neutrální a nezávislé, nemůže zaručit výsledky, které jsou úplné a konzistentní.

Poznámka

Podobné nemožnosti se objevují i pro jiné agendy s určitou minimální strukturální bohatostí.

Základní věta o nemožnosti

Věta (List&Pettit, 2002)

Žádné pravidlo agregace úsudků pro agendu Φ s $\{p, q, p \wedge q\} \subseteq \Phi$, které je anonymní, neutrální a nezávislé, nemůže zaručit výsledky, které jsou úplné a konzistentní.

Důkaz.

- N_φ^J je množina agentů, kteří přijímají formuli φ v profilu J
- Nechť F je libovolná nezávislá, anonymní a neutrální agregace.
- Pozorujeme:
  - Díky nezávislosti záleží pouze na N_φ^J, zda $\varphi \in F(J)$.
  - Pak, díky anonymitě, záleží pouze na $|N_\varphi^J|$, zda $\varphi \in F(J)$.
  - Nakonec, díky neutralitě, způsob, jakým závisí zda $\varphi \in F(J)$ na $|N_\varphi^J|$, nesmí záviset na φ samotné.
- Závěrem tedy: Pokud jsou φ a ψ přijaty stejným počtem agentů, pak musíme buď **přijmout obě** nebo **odmítnout obě**.

Základní věta o nemožnosti

Lichý počet agentů n (a $n > 1$).

Pro všechna $\varphi, \psi \in \Phi$, pokud $|N_\varphi^J| = |N_\psi^J|$, pak $\varphi \in F(J) \Leftrightarrow \psi \in F(J)$.

- Uvažujme profil J, kde
  1. $\frac{n-1}{2}$ agentů přijímá p a q
  2. jeden přijímá p ale ne q
  3. jeden přijímá q ale ne p a
  4. $\frac{n-3}{2}$ nepřijímá ani p ani q.
- Tedy: $|N_p^J| = |N_q^J| = |N_{\neg(p\wedge q)}^J|$.
- Potom:
  - Přijetí všech tří formulí odporuje konzistenci.
  - Ale pokud nepřijmeme žádnou, úplnost nás nutí přijmout jejich doplňky, což také odporuje konzistenci.

Základní věta o nemožnosti

Věta (List&Pettit, 2002)

Žádné pravidlo agregace úsudků pro agendu Φ s $\{p, q, p \wedge q\} \subseteq \Phi$, které je anonymní, neutrální a nezávislé, nemůže zaručit výsledky, které jsou úplné a konzistentní.

Sudý počet agentů n.

- Můžeme dosáhnout nemožnosti aniž bychom museli činit (téměř) jakékoli předpoklady ohledně struktury agendy.
- Uvažujme profil J s $|N_p^J| = |N_{\neg p}^J|$.
- Potom:
  - Přijetí obou odporuje konzistenci.
  - Nepřijetí žádného odporuje úplnosti. $\square$

- Neutralita je zde jen proto, že máme také $q \in \Phi$.
- Jak tedy toto „obejít“?

Obcházení nemožnosti

- Pokud jsme ochotni uvolnit některé ze svých požadavků, můžeme možná obejít nemožnost a úspěšně agregovat úsudky.
- Můžeme tedy
  - Uvolnění předpokladu univerzálního oboru: Možná se v praxi neobjeví každý logicky možný profil?
  - Uvolnění kolektivní racionality: Nebudeme ničit kolektivní konzistenci, ale můžeme chtít uvolnit kolektivní úplnost.
  - Uvolnění axiomů (to nebudeme řešit systematicky):

    Anonymita Možná jsou někteří agenti chytřejší než ostatní?

    Neutralita Možná je v pořádku zacházet, řekněme, s atomickými predikáty jinak než s konjunkcemi?

    Nezávislost Existují logické závislosti mezi predikáty; tak proč jim nedovolit ovlivnit agregaci?

Strukturální omezení: Jednorozměrná shoda

Definice

Nazvěme profil **jednorozměrně zarovnaným**, pokud můžeme uspořádat agenty tak, že pro každý (pozitivní) predikát $\varphi \in \Phi$ jsou agenti přijímající φ buď všichni vlevo nebo všichni vpravo od těch, kteří φ odmítají.

	1	2	3	4	5	Majorita
p	ANO	ANO	NE	NE	NE	NE
q	NE	NE	NE	NE	ANO	NE
$p \Rightarrow q$	NE	NE	ANO	ANO	ANO	ANO

Tvrzení (List, 2003)

Pro libovolný jednorozměrně zarovnaný profil vrátí většinové pravidlo konzistentní výsledek.

Strukturální omezení: Jednorozměrná shoda

Tvrzení (List, 2003)

Pro libovolný jednorozměrně zarovnaný profil vrátí většinové pravidlo konzistentní výsledek.

	1	2	3	4	5	Majorita
p	ANO	ANO	NE	NE	NE	NE
q	NE	NE	NE	NE	ANO	NE
$p \Rightarrow q$	NE	NE	ANO	ANO	ANO	ANO

Důkaz (pro lichý počet agentů).

- Nazvěte $\lceil \frac{n}{2} \rceil$-tého agenta **mediánovým agentem**.
  1. Podle definice pro každé φ v agendě alespoň $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ agentů (většina) přijímá φ právě tehdy, když mediánový agent ano.
  2. Jakmile je sada úsudků mediánového agenta konzistentní, je konzistentní také kolektivní sada úsudků podle majority. □

Strukturální omezení: Omezení hodnotou

Definice

Množina $X \subseteq \Phi$ se nazývá **minimálně nekonzistentní**, pokud je nekonzistentní a každá vlastní podmnožina $Y \subset X$ je konzistentní.

Definice

Profil J nazveme **omezený hodnotou**, pokud pro každou minimálně nekonzistentní množinu $X \subseteq \Phi$ existují odlišné $\varphi_X, \psi_X \in X$ takové, že $\{\varphi_X, \psi_X\} \subseteq J_i$ pro žádného agenta $i \in N$.

Tvrzení (Dietrich&List, 2010)

Pro libovolný hodnotou omezený profil vrátí většinové pravidlo konzistentní výsledek.

Strukturální omezení: Omezení hodnotou

Tvrzení (Dietrich&List, 2010)

Pro libovolný hodnotou omezený profil vrátí většinové pravidlo konzistentní výsledek.

Důkaz.

- Nechť $J = (J_1, \ldots, J_n)$ je omezený hodnotou.
- Pro spor předpokládejme, že $J = F_{\mathsf{maj}}(J)$ není konzistentní.
- Potom existuje množina $X \subseteq J$, která je minimálně nekonzistentní.
- Jelikož J je omezený hodnotou, existují dvě formule $\varphi_X, \psi_X \in X$, pro které žádný agent nepřijímá obě v profilu J.
- Z $\varphi_X, \psi_X \in X$ a $X \subseteq J$ dostáváme $\varphi_X, \psi_X \in J$.
- Proto musela existovat striktní většina pro jak φ_X, tak ψ_X.
- Tedy alespoň jeden agent přijal obě – spor! $\square$

Uvolňování axiomů: Agregace z předpokladů

- Většina pragmatických pravidel agregace obejde Listovu větu obětováním nezávislosti.
- Pravidla založená na předpokladech také uvolňují neutralitu.

Pravidlo založené na předpokladech F_{pre} pro předpoklady Φ_p a závěry Φ_c:

$$F_{\text{pre}}(J) = \Delta \cup \{\varphi \in \Phi_c \mid \Delta \models \varphi\}, \text{ pro } \Delta = \left\{\varphi \in \Phi_p \mid |N_\varphi^J| > \frac{n}{2}\right\}.$$

Připomeňme: Pokud předpokládáme, že

- množina předpokladů je množina literálů v agendě,
- agenda Φ je uzavřená vzhledem k výrokové logice, a
- počet jednotlivců n je lichý,

pak $F_{\text{pre}}(J)$ bude vždy konzistentní a úplné.

Uvolňování neutrality: Jednomyslné pravidlo s výchozími hodnotami

Uvažujme tuto uvolněnou formu neutrality agregace F

Pro libovolné φ, ψ v agendě Φ s $\varphi \models \psi$ a libovolný profil J s $|N^J_\varphi| = |N^J_\psi|$ bychom měli mít $\varphi \in F(J) \Rightarrow \psi \in F(J)$.

Nechť $F^\star$ je pravidlo, které pro každou dvojici $(\varphi, \neg\varphi)$ v Φ přijme:

- φ, pokud má jednomyslnou podporu a
- („výchozí hodnotu“) $\neg\varphi$ jinak.

Tvrzení (Terzopoulou&Endriss, 2021)

Pro agendu $\Phi = \{p, \neg p, q, \neg q, p \wedge q, \neg(p \wedge q)\}$ pravidlo $F^\star$ splňuje anonymitu, uvolněnou neutralitu, nezávislost, kompletnost a konzistenci.

- Takže uvolněním neutrality obcházíme List-Pettitovu nemožnost.
- Důkaz tohoto konkrétního výsledku je celkem přímočarý.

Uvolňování úplnosti a anonymity: Oligarchie

- Můžeme uvolnit úplnost na tzv. deduktivní uzávěr, kde stačí, aby platilo, že $\varphi \in \Phi$ a $J \models \varphi$ implikuje $\varphi \in J$ pro výsledek J.
- Oligarchické pravidlo pro koalici $C \subseteq N$ je pravidlo, které přijímá φ, pokud ji přijímá každý v C.
- Zvláštní případy:
  - diktátorské pravidlo: $|C| = 1$
  - jednomyslné pravidlo: $C = N$
- Je snadné ověřit, že každé oligarchické pravidlo splňuje:
  - kolektivní konzistenci a deduktivní uzávěr
  - neutralitu a nezávislost
  - ale ne anonymitu (kromě $C = N$)
  - a také ne úplnost (kromě $|C| = 1$)

Gärdenfors (2006) poskytuje podrobnější axiomatickou charakterizaci.

P. Gärdenfors. A Representation Theorem for Voting with Logical Consequences. *Economics and Philosophy*, 2006.

Uvolňování úplnosti: Pravidla nadpoloviční většiny

- Připomeňme uniformní kvótová pravidla F_λ s $\lambda \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$:

$$F_\lambda(J) = \left\{\phi \in \Phi \mid |N_\phi^J| \geq \lambda\right\} .$$

- Uniformní kvótová pravidla s $\lambda > \frac{n}{2}$ jsou známa jako **pravidla nadpoloviční většiny** (**supermajoritní**).
- Vysoké kvóty sice mohou být konzistentní (na úkor úplnosti).

Omezené agendy

- Předpokládejme, že agenda Φ se skládá pouze z literálů.
- Pak pravidlo většiny vždy vrátí výsledek, který je konzistentní (a pro lichá n i úplný).
- Toto je triviální příklad vlastnosti agendy, která zajišťuje konzistenci.
- Další zajímavé příklady budou později během kurzu.

Omezení domény vs. Vlastnosti agendy

Pozor na rozdíl:

- Omezení domény se vztahují na profily (pro libovolné agendy).
  - Příklady: jednorozměrná shoda / hodnotově omezené profily
- Vlastnosti agendy se vztahují na agendy (omezují jejich strukturu).
  - Příklad: agendy pouze s literály

Axiomatické charakterizace pravidel

- Metoda axiomatiky není dobrá pouze pro výsledky nemožnosti.
- Můžeme také získat charakterizační výsledky, tj. jedinečné charakterizace (rodin) pravidel agregace v pojmech axiomů:
  - Užitečné k argumentaci pro pravidlo v pojmech základních principů.
  - Literatura stále řídká: pro mnoho pravidel nemáme charakterizace.
  - Ale pro kvótová pravidla jasný obraz s hezkými a jednoduchými výsledky.

Axiomy

Anonymita Pro libovolný profil J a libovolnou permutaci $\pi : N \to N$ bychom měli mít $F(J_1, \ldots, J_n) = F(J_{\pi(1)}, \ldots, J_{\pi(n)})$.

Neutralita Pro libovolné φ, ψ v agendě Φ a libovolný profil J s $N_\varphi^J = N_\psi^J$ bychom měli mít $\varphi \in F(J) \Leftrightarrow \psi \in F(J)$.

Nezávislost Pro libovolné φ v agendě Φ a profily J a J' s $N_\varphi^J = N_\varphi^{J'}$ bychom měli mít $\varphi \in F(J) \Leftrightarrow \varphi \in F(J')$.

Monotonie Větší podpora by neměla poškodit formuli! Pro libovolný profil J, agenta i, soubor hodnocení $J_i^0 \in J(\Phi)$ a formuli $\varphi \in J_i' \setminus J_i$ bychom měli mít $\varphi \in F(J) \Rightarrow \varphi \in F(J^{-i}, J_i')$.

Vítězné koalice

- Alternativní definice: Pravidlo F je **nezávislé**, pokud existuje rodina množin (vítězných koalic) agentů $W_\varphi \subseteq 2^N$, jedna pro každé $\varphi \in \Phi$, taková, že pro všechny profily $J \in J(\Phi)^n$ platí $\varphi \in F(J)$ právě tehdy, když $N^J_\varphi \in W_\varphi$.
- Buď F je nezávislé a definované pomocí $\{W_\varphi\}_{\varphi\in\Phi}$. Potom:
  - F je anonymní právě tehdy, když je W_φ uzavřené vzhledem k rovnosti velikostí množin: $C \in W_\varphi$ a $|C| = |C_0|$ implikuje $C_0 \in W_\varphi$ pro všechny $C, C_0 \subseteq N$ a všechna $\varphi \in \Phi$.
  - F je monotónní právě tehdy, když je W_φ uzavřené vzhledem k nadřazenosti: $C \in W_\varphi$ a $C \subseteq C_0$ implikuje $C_0 \in W_\varphi$ pro všechny $C, C_0 \subseteq N$ a všechna $\varphi \in \Phi$.
  - F je úplná právě tehdy, když jsou W_φ maximální: $C \in W_\varphi$ nebo $C \in W_{\sim\varphi}$ pro všechna C, φ.
  - F je uzavřená pro doplňky právě tehdy, když $C \notin W_\varphi$ nebo $C \notin W_{\sim\varphi}$ pro všechna C, φ.
- A co neutralita?

Jemný detail týkající se neutrality

- Připomeňme formální definici neutrality:

  Neutralita: Pro libovolné formule φ a ψ v agendě Φ a libovolný profil J s $N_\varphi^J = N_\psi^J$ bychom měli mít $\varphi \in F(J) \Leftrightarrow \psi \in F(J)$.
- Intuitivně to znamená, že bychom s formulemi měli zacházet symetricky (shodně).
- Tedy (téměř) platí:

  Neutralita: Pro libovolné nezávislé pravidlo F platí, že F je neutrální, pokud $W_\varphi = W_\psi$ pro všechny formule $\varphi, \psi \in \Phi$.
- Ale pozor, neutralita se neuplatní u triviálních agend, jako je například $\Phi = \{p, \neg p\}$.
- Zde platí vakuum, protože neexistuje žádný přípustný profil, ve kterém by stejní agenti přijímali p a $\neg p$.
- Ale pro netriviální agendy platí uvedená charakterizace.

Axiomatická charakterizace kvótových pravidel

Jsme nyní připraveni nahlédnout jednoduchý charakterizační výsledek:

Věta (Dietrich&List, 2007)

Pravidlo agregace je anonymní, nezávislé a monotónní právě tehdy, když je kvótovým pravidlem.

Důkaz.

- Směr zprava doleva je triviální.
- Směr zleva doprava je snadný, když se přemýšlíme o axiomatech v souvislosti s vítěznými koalicemi. □

Takže pro ne-triviální agendy (vyhneme se jemnému detailu s neutralitou):

Důsledek

Pravidlo agregace je anonymní, neutrální, nezávislé a monotónní (= ANIM) právě tehdy, když je uniformním kvótovým pravidlem.

Axiomatická charakterizace majorioty

- Zvýšení kvóty zachovává vlastnost bezkomplementní, zatímco snížení kvóty zachovává úplnost.
- Pro lichá n můžeme získat obě tyto vlastnosti pro $\lambda = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Fakt

Pro liché n je pravidlo agregace ANIM, úplné a bezkomplementární právě tehdy, když je to (striktní) pravidlo většiny.

- **Poznámka:** Všimněte si úzké souvislosti s Mayovou větou!
- Pro sudé n není ani striktní ani slabá majorita současně úplná a bezkomplementární.

Fakt

Pro sudé n nemůže existovat pravidlo agregace, které je ANIM, úplné a bezkomplementární.

Co bychom po dnešku měli znát

- Příklady pravidel: kvóta, pravidlo založené na předpokladech
- Příklad axiomů: anonymita, neutralita, nezávislost
- Základní nemožnostní věta
- Způsoby obejití základní věty o nemožnosti pomocí relaxací doménových předpokladů, kolektivní racionality a axiomů
- Reformulace základních axiomů ve smyslu omezení na rodiny vítězných koalic
- Axiomatická charakterizace kvótních pravidel (včetně majority)