ARROW -1-

[D] Arrowova Social Choice function (ASC) je funkce vracející totální uspořádání na alternativách.
(tj $\mathcal{E}$ ... množina vš. usp., pak $f : \mathcal{E}^n \to \mathcal{E}$).

[D] Vlastnosti:

U ... unrestr domain

P ... slabá Pareto pokud pro $x, y \in C$ každý preferuje x před y pak totéž dělá i výsledná ASC

IIR ... pokud ~~po~~ relativní pořadí na $x, y \in C$ stejné v profilu, je stejné i v ASC.

D ... neexistuje diktátor.

[V] (Arrow 1951, 1963)

$\forall n$ pro $|C| \geq 3$ neexistuje ASC splňující U, P, IIR a D.

[D] Množina voličů $\hat{V} \subseteq V$ je téměř rozhodná pro x proti y pokud
- každý $v \in \hat{V}$ preferuje x proti y
- každý $v \notin \hat{V}$ preferuje y proti x

$\Big\} \Rightarrow x$ pref. před y pro ASC.

[D] Množina $\hat{V} \subseteq V$ je rozhodná pro x proti y, pokud každý $v \in \hat{V}$ pref x proti y $\Rightarrow$ x pref. před y pro ASC.

Označ $D_v(x, y)$ pokud v samotný je téměř rozhodný pro x proti y

$\bar{D}_v(x, y)$ pokud v samotný je rozhodný pro x proti y.

$\bar{D}_v(x, y) \Rightarrow D_v(x, y)$.

[L] Pokud existuje individual $v \in V$, který je téměř rozhodný pro nějaké 2 alternativy x a y pro něž ASC splní U, P, IIR potom v má <u>sílu diktátora</u>. ($\equiv$ je diktátor)

Dk (Lemma 1): (LI) $\boxed{\text{ozn } P \text{ tu ASC}}$

Nejprve 2 plné kroky důkazu: Označ $\bar{v}$ každý $\bar{v} \in V - v$

Protože máme U, můžem zkoušet různé profily

① Co se stane když:

v: preferuje x před y před z $\quad x \to y \to z$

$\bar{v}$: preferuje y před x i před z $\quad x \leftarrow y \to z$

$\boxed{\text{! nespecifikuji pro } \bar{v} \text{ vztahy mezi } x \text{ a } z \text{ !}}$

dostanu xPy a yPz (sl. Pareto) a tedy i xPz (tranz)

↳ vyvodím že $D_v(x,y) \Rightarrow \bar{D}_v(x,z) \Rightarrow D_v(x,z)$.

② v: preferuje z před x před y $\quad z \to x \to y$

$\bar{v}$: preferuje z i y před x. $\quad z \to x \leftarrow y$

↳ zPx & xPy → zPy

vyvozuji $D_v(x,y) \Rightarrow \bar{D}_v(z,y) \Rightarrow D_v(z,y)$.

"Rozšíří náhodu":

③ v: $y \to x \to z$ $\quad \bar{v}$: $y \to x \leftarrow z$: yPx, xPz → yPz

↳ $D_v(x,z) \Rightarrow \bar{D}_v(y,z) \Rightarrow D_v(y,z)$.

④ v: $y \to z \to x$ $\quad \bar{v}$: $y \leftarrow z \to x$: yPz, zPx → yPx

↳ $D_v(y,z) \Rightarrow \bar{D}_v(y,x) \Rightarrow D_v(y,x)$.

⑤ v: $z \to y \to x$ $\quad \bar{v}$: $z \to y \leftarrow x$: zPy, yPx → zPx

↳ $D_v(y,x) \Rightarrow \bar{D}_v(z,x) \Rightarrow D_v(z,x)$

⑥ v: $x \to z \to y$ $\quad \bar{v}$: $x \leftarrow z \to y$: xPz, zPy → xPy

↳ $D_v(x,z) \Rightarrow \bar{D}_v(x,y) \Rightarrow D_v(x,y)$.

⇒ z jedné dvojice (x,y) lze rozšířit rozhodnost na všechny dvojice mezi třemi alternativami.

→ rozšíření na celé C pomocí po dvou se překrývajících trojic

∎

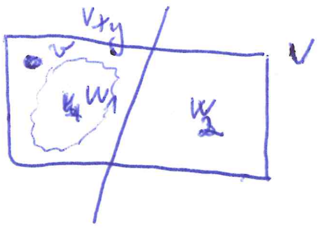
Dokončení DŮ arrow:

z $\boxed{LI}$ víme, že nemůžeme mít téměř rozhodné individuum. ale máme nějakou rozhodnou množinu pro (x,y)

→ určitě splňuje celé $\underline{V}$.

→ označ V_{xy} nějakou nejmenší téměř rozhodnou pro x před y

rozděl V:



tj $W_2 := V \setminus V_{xy}$

$v \in V_{xy}$ & $W_1 \cup \{v\} = V_{xy}$

uvaž profil:

v : preferuje x před y před z

W_1 : preferuje z před x před y

W_2 : preferuje y před z před x.

$\boxed{\hookrightarrow \quad xPy}$

$\boxed{\text{Může nastat } zPy \text{ ?}}$