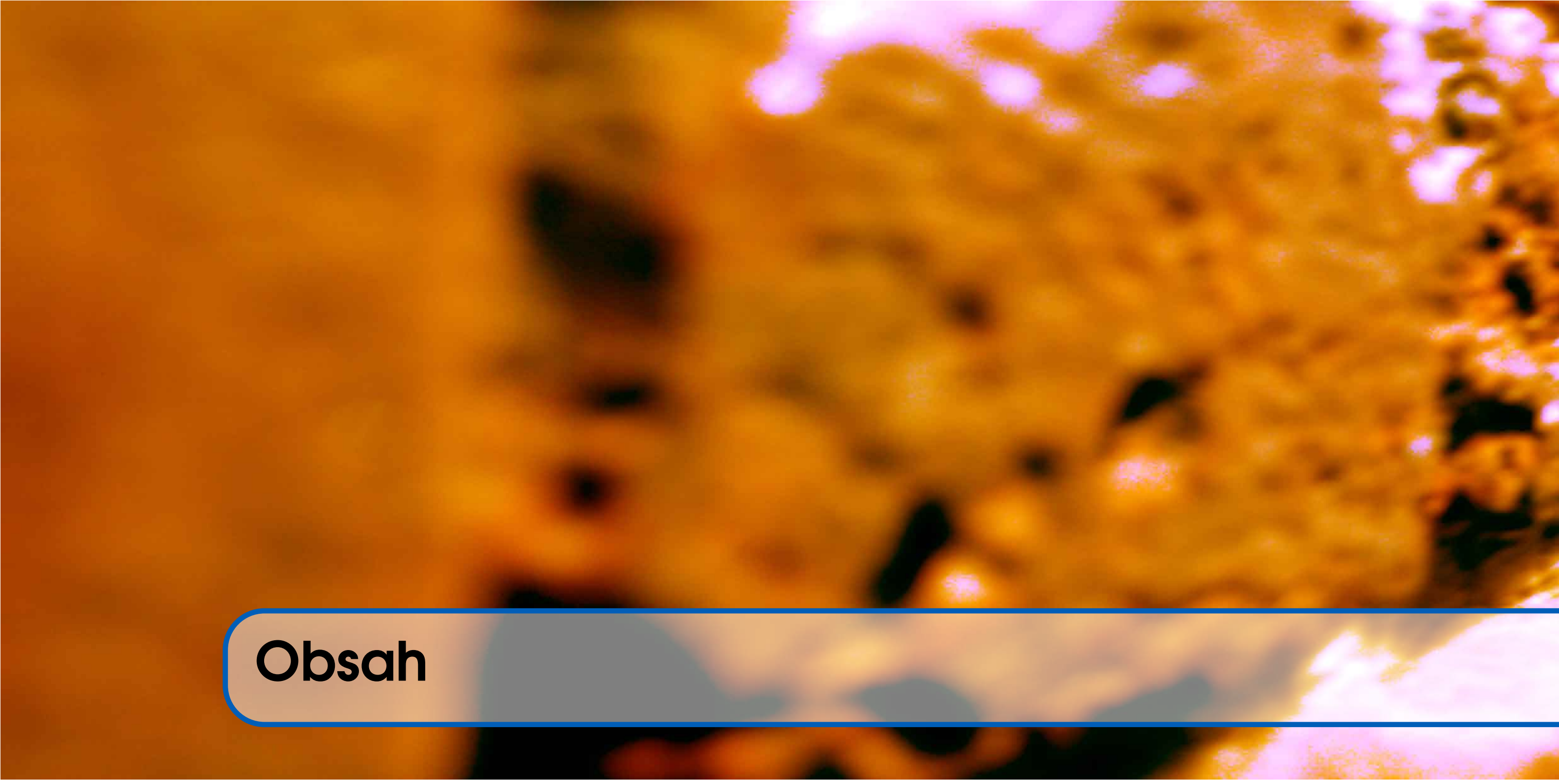


Obsah

1. Základní pojmy

Volby jsou zásadní součástí demokratických společností již od antického Řecka, v moderním pojetí jistě minimálně od dob Velké francouzské revoluce a Deklarace nezávislosti. Přesto se v různých částech světa používají výrazně odlišné způsoby volby, někdy se dokonce volební pravidla liší i v jednotlivých státech.

Možná trochu překvapivě se volbám a volebním systémům s rozkvětem teorie her začali ve velké míře věnovat i matematici zabývající se tímto oborem. Dovolte nám tedy na dalších stránkách představit alespoň malou část herní teorie, která se za konceptem voleb skrývá. Začneme, jak jinak, než motivačním příkladem.

■ **Příklad 1.1** Václava, Josefina a Roman se rozhodují, kam se vydají na dnešní oběd. Z časových důvodů připadají v úvahu pouze tři možnosti — menzu Studentský dům, restauraci U Topolů a nedalekou pizzerii.

Václava by šla nejraději do menzy, jelikož má připravenou krabičku, do které by si nechala připravit rovnou i večeři. Do krabičky jí jídlo dají i U Topolů, proto je to její druhá volba. Na pizzu moc nemá chuť, jelikož se jí v pondělí přejedla.

Její kolegyně Josefina by šla také nejraději do menzy. Josefina je totiž doktorandka, tedy její volbu takto ke konci měsíce není třeba příliš vysvětlovat. Ze stejných pohnutek preferuje i pizzerii před restaurací.

Roman to je naopak milovník dobrého jídla, proto se snaží prosadit návštěvu restaurace. A jelikož je toho názoru, že všechno je lepší než menza, je jeho druhou volbou pizzerie.

Jakým způsobem mají kolegové *zvolit* místo oběda, pokud chtějí, aby byli s volbou všichni co nejspokojenější? ■

Nyní pojem *volby* převedeme z přirozené intuice do formálního jazyka matematiky. Nejdůležitějšími pojmy pro nás budou následující:

- Jako C budeme označovat konečnou množinu $m \geq 2$ *kandidátů* nebo *alternativ*.
- Jako V budeme označovat neprázdnou a konečnou množinu n *voličů*.

Tyto množiny zatím nenesou žádnou informaci o představách voličů o vhodnosti kandidátů. Z toho důvodu předpokládáme, že každý volič $v \in V$ své preference vyjadřuje pomocí *hlasu* $\succeq_v$, který je lineárním uspořádáním množiny C, tj. pro dva kandidáty x a y má zápis $x \succeq_v y$ význam „volič v považuje kandidáta x za alespoň tak dobrého, jako je kandidát y“. Uvažujeme-li pouze ostrá uspořádání (bez rovnosti mezi kandidáty), pak budeme hlas značit $\succ_v$. Jako $\mathscr{L}(C)$ označíme množinu všech možných hlasů nad množinou kandidátů C.

Konkrétní hlasy všech voličů tvoří tzv. *profil preferencí*, který budeme značit většinou $\mathscr{P}$. Formálně, profil preferencí je uspořádaná n-tice $\mathscr{P} = (\succeq_1, \dots, \succeq_n)$ a množinu všech profilů preferencí označíme $\mathscr{L}(C)^n$. Pokud to nebude způsobovat zmatení, bude $\mathscr{P}$ někdy říkat pouze *profil*. Nutno podotknout, že V musí být opravdu n-tice a nemůže se jednat o množinu, jelikož dva různí voliči $v_i, v_j \in V$ mohou odevzdat shodné hlasy.

Jako $\mathrm{pos}_{\mathscr{P}}(c,v)$ značit pozici kandidáta $c \in C$ v hlasu $\succeq_v \in \mathscr{P}$. Dále, jako $\max_{\succeq_v}(C)$ (respektive $\min_{\succeq_v}(C)$) označíme kandidáta na prvním (respektive posledním) místě v $\succeq_v$. Platí tedy $\mathrm{pos}_{\mathscr{P}}(\max_{\succeq_v}(C), v) = 1$ a $\mathrm{pos}_{\mathscr{P}}(\min_{\succeq_v}(C), v) = m$. Jestliže je profil $\mathscr{P}$ z kontextu zřejmý, budeme ho ze značení vynechávat a budeme používat pouze $\mathrm{pos}(c,v)$.

Zřejmě není třeba příliš upozorňovat na to, že požadavek na lineární uspořádání celé množiny alternativ je z praktického hlediska přemrštěný. Sami si například můžete zkusit uspořádat strany ucházejí se o hlasy voličů v posledních parlamentních volbách[1] dle vašich osobních preferencí. Pokud to samé zkusíte provést o týden později, dopadne výsledek stejně?

Nyní již máme veškerou notaci potřebnou k tomu, abychom mohli formálně definovat klíčový pojem celého kurzu, totiž volby samotné.

Definice 1.1 Instance voleb je uspořádaná trojice $\mathscr{E} = (C, V, \mathscr{P})$, kde C je množina kandidátů, V je množina voličů a $\mathscr{P}$ je profil preferencí.

1.1 Volební pravidla

Ústřední otázkou, která nás u většiny voleb zajímá, je, kteří kandidáti jsou jejich vítězi. V teorii voleb se pak zabýváme návrhem mechanismů, jak takové vítěze najít. Tyto mechanismy většinou nazýváme *volební pravidla*.

Definice 1.2 — Volební pravidlo. Nechť C je množina kandidátů a V je množina voličů. *Volební pravidlo* je funkce

$$f\colon \mathscr{L}(C)^n \to 2^C \setminus \emptyset.$$

Je patrné, že takto definované volební pravidlo nemusí dát pouze jednoho vítěze. Vítězů může být libovolný počet, tedy klidně i celá C. Jestliže takový výsledek nastane, řekneme, že vítězní kandidáti pro profil *remizují*. Na druhou stranu, pro každý profil preferencí musí volební pravidlo vrátit alespoň jednoho vítěze.

V některých případech nás nezajímá pouze to, kteří kandidáti jsou pro ten který profil vítězi, ale rádi bychom znali kompletní pořadí kandidátů vzhledem k profilu. Z toho důvodu někdy uvažujeme složitější funkce, než jsou volební pravidla.

Definice 1.3 — Social-choice function. Nechť C je množina kandidátů a V je množina voličů. *Social-choice function* je funkce

$$f_{\mathrm{sc}}\colon \mathscr{L}(C)^n \to \mathscr{L}(C).$$

Tedy social-choice function na základě preferencí voličů vrátí nějaké lineární uspořádání množiny kandidátů. Všimněme si, že z každé social-choice function uděláme snadno volební pravidlo prostým vrácením $\max_{f_{\mathrm{sc}}(\mathscr{P})}(C)$ namísto celého uspořádání.

[1] A to ani nemluvíme o tom, že systém voleb do parlamentu České republiky je ještě o něco složitější, je totiž možné navíc vybírat preferované kandidáty, kterých může mít, dle kraje, strana na kandidátní listině až 36.

Pro jednoduchost uvažujme, že množina kandidátů C a množina voličů V jsou fixní. Kolik existuje různých volebních pravidle pro tyto fixní množiny? Dvě pravidla f a f' považujeme za různé, pokud existuje alespoň jeden profil $\mathscr{P}$ takový, že $f(\mathscr{P}) \neq f'(\mathscr{P})$. Z toho přímo plyne, že pro každou dvojici (C,V) existuje $(2^m-1)^{|\mathscr{L}(C)^n|}$ různých pravidel. Pochopitelně ne všechna pravidla dávají dobrý smysl, proto na následujících stránkách najdete přehled těch nejpoužívanějších. V kapitole 1.2 pak definujeme několik vlastností, které „pravidla dávající dobrý smysl“ formalizují v řeči matematiky.

1.1.1 Skórovací protokoly

Volební pravidlo `Plurality` zvolí za vítěze ty kandidáty, kteří jsou u nejvíce voličů jejich nejvíce preferovanou alternativou. Formálně, pro profil preferencí $\mathscr{P}$ je `Plurality` definováno následovně

Pravidlo 1 — `Plurality`. Nechť $\mathscr{E} = (C,V,\mathscr{P})$ je instance voleb. Volební pravidlo `Plurality` je definováno jako

$$\mathtt{Plurality}(\mathscr{P}) = \left\{ x \in C \;\middle|\; \forall y \in C\colon \left|\left\{ v \in V \mid \max_{\succeq_v}(C) = y \right\}\right| \le \left|\left\{ v \in V \mid \max_{\succeq_v}(C) = x \right\}\right| \right\}.$$

V jistém smyslu opačným volebním pravidlem je VETO. Při použití tohoto volebního pravidla se vítězem stává ten, kde se u nejméně voličů nachází jako nejhorší alternativa.

Pravidlo 2 — `Veto`. Nechť $\mathscr{E} = (C,V,\mathscr{P})$ je instance voleb. Volební pravidlo `Veto` je definováno jako

$$\mathtt{Veto}(\mathscr{P}) = \left\{ x \in C \;\middle|\; \forall y \in C\colon \left|\left\{ v \in V \mid \min_{\succeq_v}(C) = y \right\}\right| \ge \left|\left\{ v \in V \mid \min_{\succeq_v}(C) = x \right\}\right| \right\}.$$

Obě doposud představená volební pravidla mají něco společného, totiž že kandidáti dostávají pomyslné „body“ na základě toho, na jakém místě se nacházejí v profilech preferencí jednotlivých voličů. Takovou rodinu pravidel lze popsat trochu obecněji.

Pravidlo 3 — k-`Approval`. Nechť $\mathscr{E} = (C,V,\mathscr{P})$ je instance voleb a $k \le m$ je kladné celé číslo. Volební pravidlo k-`Approval` je definováno jako

$$k\text{-}\mathtt{Approval}(\mathscr{P}) = \left\{ x \in C \;\middle|\; \forall y \in C\colon \left|\left\{ v \in V \mid \operatorname{pos}(y,v) \le k \right\}\right| \le \left|\left\{ v \in V \mid \operatorname{pos}(y,v) \le k \right\}\right| \right\}.$$

Je snadné nahlédnout, že `Plurality` odpovídá pravidlu 1-`Approval`, zatímco `Veto` je ekvivalentní pravidlu $(m-1)$-`Approval`.

V zobecňování můžeme jít ještě dál. Všimněme si, že z pohledu k-`Approval` je síla hlasu voliče $v \in V$ pro kandidáta $c \in C$ stejná bez ohledu na to, zda je jeho nejvíce preferovanou alternativou, nebo se v jeho hlasu nachází až na pozici k. Jemnější rozlišení těchto případů umožňuje následující rodina volebních pravidel.

Definice 1.4 — Skórovací protokol. Nechť C je množina m kandidátů a V je množina n voličů. Volební pravidlo f nazveme *skórovacím protokolem* pokud existuje *skórovací vektor* $\vec{\mathbf{w}} = (w_1,\dots,w_m)$ takový, že pro každý profil preferencí $\mathscr{P} \in \mathscr{L}(C)^n$ platí

$$f(\mathscr{P}) = \operatorname*{argmax}_{c \in C} \sum_{v \in V} w_{\operatorname{pos}(c,v)}.$$

Opět je snadné nahlédnout, že k-`Approval` je pouze speciální případ skórovacího protokolu se skórovacím vektorem $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k},0,0,\ldots,0)$.

Jak již bylo řečeno, skórovací protokoly, případně *skórovací pravidla*, tvoří celou rodinu volebních pravidel. Asi nejznámějším zástupcem této rodiny je volební pravidlo `Borda`. Toto pravidlo navrhl okolo roku 1781 francouzský matematik Jean-Charles de Borda[2].

Pravidlo 4 — `Borda`. Volební pravidlo `Borda` je skórovací protokol se skórovacím vektorem

$$\vec{\mathbf{w}} = (m-1, m-2, m-3, \ldots, 2, 1, 0).$$

Dále, pro každého kandidáta $c \in C$ a profil $\mathscr{P}$ definujeme $\mathrm{score}^{\mathscr{P}}_{\mathtt{Borda}}(c) = \sum_{v \in V} w_{\mathrm{pos}(c,v)}$ jako *Borda skore* kandidáta c v profilu $\mathscr{P}$.

Toto volební pravidlo je využíváno například pro volby do dolní komory na Nauru, při prezidentských volbách na Karibati a v omezené míře i pro volby ve Slovinsku a na Islandu. Krom čistě politických voleb využívají tento skórovací protokol některé akademické instituce, projekt X.org pro volbu do správní rady a modifikované `Borda` se používá také při populární soutěži Eurovision Song Contest.

Zajímavé je, že skórovací protokoly najdou využití nejen při klasických volbách, ale také například při sportovních kláních.

■ **Příklad 1.2** Při závodech Formule 1 se mezi léty 2010-2018[a] používal pro přidělení bodů za jednotlivé závody skórovací vektor

$$\vec{\mathbf{w}} = (25, 18, 15, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 1, 0, 0, \ldots, 0, 0).$$

Převedeme-li šampionát do řeči voleb, tak alternativy jsou pochopitelně jednotliví závodníci, zatímco voliči jsou jednotlivé Velké ceny. Profily preferencí pak odpovídají pozicím jezdců v jednotlivých závodech. ■

[a] Od roku 2019 je ještě přidělován jeden bod tomu závodníkovi, který zajel nejrychlejší kolo.

Nyní se pojďme kouknout na to, jaký výsledek dají jednotlivé skórovací systémy pro jednoduchý příklad voleb.

■ **Příklad 1.3** Tři kamarádi, Arnošt, Bojana a Ctibora, se dohadují, jak stráví dnešní odpoledne. Arnošt by se jel nejraději projet na kole, o něco méně nadšený by byl z návštěvy minigolfu a moc se mu nechce jít opět plavat na místní plovárnu.

Bojana byla na cyklovýletě včera, proto by šla nejraději plavat. Před vyjížďkou na kole preferuje i hraní minigolfu. Ctibora je tajně zamilovaná do Arnošta a proto, aby se mu zalíbila, zopakuje jeho preference.

Jestliže by pro rozhodování o programu použili volební pravidlo `Plurality`, pak by zjevně vyhrála vyjížďka na kole, jelikož vyhrává a dvou voličů, minigolf u jednoho a plavání dokonce u žádného.

V případě `Veto` by naopak vyhrál minigolf, který dostane bod za každého voliče, na druhém místě bude kolo, a to i přes to, že ho preferuje majorita voličů, a plavání zůstane opět poslední.

Při využití pravidla `Borda` dá Arnošt, stejně jako Ctibora, dva body vyjížďce na kole, jeden bod minigolfu a žádný bod návštěvě plaveckého bazénu. Bojana přidělí dva body minigolfu a jeden bod plavání. Ve výsledku bude mít tedy kolo stejně bodů jako minigolf. ■

[2] Jean-Charles de Borda (1733–1799) je znám zejména pro své studie v oblasti navigace, geodézie a balistice. Je také jedním ze 72 vědců, jejichž jméno můžeme najít zvěčněno na Eifellově věži v Paříži.

1.1.2 Pravidla založená na porovnávání kandidátů

Jedním z nejvýznamnějších konceptů v teorii volebních systémů je pojem *Condorcetovo kritérium*, za který vděčíme Nicolasi de Condorcemu[3], francouzskému matematikovi, filosofovi a politikovi aktivnímu především během Velké francouzské revoluce.

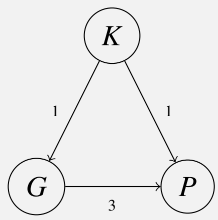
Definice 1.5 — Condorcetův vítěz. Pro každé dvě alternativy $c, d \in C$ definujeme

$$\mu(c,d) = |\{v \in V : c \succ_v d\}| - |\{v \in V : d \succ_v c\}|.$$

Grafem majority je vážený orientovaný graf (G, ω) s vrcholy tvořenými alternativami z C. Dvě alternativy $c, d \in C$ jsou v grafu spojeny hranou právě tehdy když $\mu(c,d) \geq 0$ s váhou $\mu(c,d)$. Zdroj v grafu majority pak nazveme *Condorcetovým vítězem*.

Jak známo, ne každý orientovaný graf musí mít zdroj, tedy ani Condorcetův vítěz nemusí existovat.

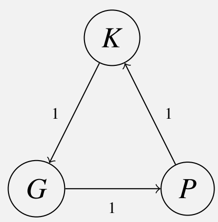
■ **Příklad 1.4** Sestavíme-li graf majority pro situaci z příkladu 1.3, pak bude mít tvar



ze kterého je patrné, že vrchol K je zdroj a tedy i Condorcetův vítěz. Pozměníme-li priority následovně

$$\begin{aligned} A&: \quad \text{kolo} \succ \text{golf} \succ \text{plavání} \\ B&: \quad \text{plavání} \succ \text{kolo} \succ \text{golf} \\ C&: \quad \text{golf} \succ \text{plavání} \succ \text{kolo}, \end{aligned}$$

graf majority bude mít tvar



V takovém grafu majority již zdroj není, tedy ani Condorcetův vítěz neexistuje. ■

Pro nás budou pochopitelně zajímavé systémy, které jsou s Condorcetovým kritériem kompatibilní, tedy takové, které v případě, že ve volbách Condorcetův vítěz existuje, tohoto vždy budou obsahovat v množině vítězů.

[3] Celým jménem Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, markýz de Condorcet (1743–1794). Během Velké francouzské revoluce působil jako předseda Zákonodárného shromáždění. Kromě jiného pracoval na návrhu ústavy, snažil se prosadit rovná práva žen a zákaz otroctví. Po násilném potlačení skupiny demokratických politiků, do které patřil, byl zatčen a zemřel za nejasných okolností ve vězení.

■ **Příklad 1.5 — Copeland$^\alpha$.** První představený systém respektující Condorcetova vítěze je Copelandova metoda. Ta je založena na porovnávání vždy dvojic kandidátů a vycházíme opět z grafu majority. Pro každou alternativu $c \in C$ definujeme její skóre jako

$$\mathrm{score}_{C^\alpha}(c) = |\{(c,d) = e \in E\colon\ \omega(e) > 0\}| + \alpha \cdot |\{(c,d) = e \in E\colon\ \omega(e) = 0\}|,$$

kde $\alpha \in [0,1]$.

Jinými slovy skóre každé alternativy je rovno počtu alternativ, nad kterými c vyhrává, plus počtu remíz vynásobených vybraným parametrem α.

Vítězem voleb se stává alternativa s maximální hodnotou Copelandova skóre. ■

Opět se nabízí hezká paralela se světem sportu, tentokrát s hokejem či fotbalem. Pokud sezonu a zápasy převedeme do řeči voleb podobně jako v příkladu 1.2, můžeme vítěze určit pomocí Copelandovy metody s parametrem $\alpha = 1/3$.

■ **Příklad 1.6 — Simpsonovo hlasování.** Pro každou alternativu $c \in C$ definujeme její skóre jako minimální váhu hrany v grafu majority, která z něj vychází. Aby taková definice dávala smysl, musíme počítat i hrany směřující do vrcholu, jejich váhu ovšem uvažujeme s opačným znaménkem. Za vítěze pak zvolíme tu alternativu, která má tuto hodnotu největší. Z toho důvodu se také pravidlo někdy nazývá Maximin. ■

Dříve představená volební pravidla byla výpočetně takřka triviální. Například najít vítěze u Plurality stihneme jistě v polynomiálním čase. Na druhou stranu najít vítěze v následujících systémech je většinou NP-těžké, a v některých případech problémy dokonce nejsou NP-úplné.

■ **Příklad 1.7 — Youngův systém.** Pro každou alternativu $c \in C$ definujeme *Youngovo skóre* $\mathrm{score}_Y(c)$ jako počet voličů, které je třeba z voleb odstranit tak, aby c byla Condorcetovým vítězem. Vítězem je alternativa s minimální hodnotou Youngova skóre.

V případě, že volby již Condorcetova vítěze mají, nemusí se pro tuto alternativu mazat žádný volič, tedy bude mít hodnotu skóre nula. ■

Dodgson[4]

Pravidlo 5 — `Dodgson`. V případě Dodgsonovy volby je skóre $\mathrm{score}_D(c)$ každé alternativy $c \in C$ měřeno počtem přesunů alternativ v každém hlasu $v \in V$ tak, aby byl c Condorcetův vítěz, přičemž přesouvat se v profilech mohou pouze sousední alternativy. Vítězem je opět alternativa s nejnižším skóre.

Kemeny[5]

Pravidlo 6 — `Kemeny` (Kemeny 1959). Výhodou `Kemeny` je, že toto volební pravidlo umí pracovat i se slabým uspořádáním na množině alternativ. Nechť P, Q jsou dvě lineární uspořádání na množině C. Pro každé dvě alternativy $c, d \in C$ definujeme jejich vzdálenost vzhledem

[4] Charles Lutwidge Dodgson (1832–1898) byl anglický matematik a spisovatel. Známý je spíš pod pseudonymem Lewis Carroll, pod kterým vydal své vůbec nejnámější dílo — *Alenku v říši divů*.

[5] John George Kemeny (1926-1992) je americký matematik maďarského původu. Je znám zejména jako spoluautor programovacího jazyka BASIC. Za svou kariéru úzce spolupracoval s velkým množstvím světových věděckých kapacit, mimo jiné A. Einsteinem, A. Churchem, J. von Neumannem či R. Feynmanem.

k uspořádáním P,Q jako

$$\mathrm{d}_{P,Q}(c,d) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } c \succ_P d \iff c \succ_Q d, \\ 2 & \text{pokud } (c \succ_P d \wedge d \succ_Q c) \vee (d \succ_P c \wedge c \succ_Q d), \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Celkovou vzdálenost uspořádání P a Q potom definujeme jako

$$\mathrm{dist}(P,Q) = \sum_{\{c,d\} \subseteq C} \mathrm{d}_{P,Q}(c,d)$$

a skóre uspořádání P pak jako

$$\mathrm{score}_K(P) = \sum_{Q \in V} \mathrm{dist}(P,Q).$$

Kemenyho vítězi jsou pak alternativy na prvních pozicích ve všech uspořádání s minimálním Kemenyho skóre.

`Kemeny` je kvůli zajímavým vlastnostem, i přes značnou výpočetní složitost, v praxi používáno poměrně často.

■ **Příklad 1.8 — Shulzeho metoda.** Při vyhodnocování voleb (C,V) pomocí Schulzeho metody nejdříve sestrojíme graf majority G. Pro každou cestu P v G definujeme její sílu jako minimální váhu hrany na této cestě. Hrany se mohou, podobně jako při hledání maximálního toku, procházet i protisměrně, musíme ale měnit znaménka váhy.

Pro každou dvojici $c,d \in C$ definujeme hodnotu $S(c,d)$ jako maximální sílu přes všechny cesty z c do d. Vítězem voleb je pak alternativa $c \in C$ splňující $S(c,d) \geq S(d,c)$ pro každé $d \in C \setminus \{c\}$. ■

Zmiňovaná Schulzeho metoda je využívána pro vnitřní volby mnoha organizacemi, mezi jinými například projekty Debian, Gentoo, Wikimedia Foundation nebo množstvím Pirátských stran.

1.1.3 Vícefázové systémy

V reálném světě se často používají vícefázové či vícekolové volební systémy. Vzpomeňme například senátní či prezidentské volby v České republice. Na podobné výdobytky myslí pochopitelně i bohatá teorie okolo volebních systému, proto nyní představíme několik takových systémů.

Pravidlo 7 — `PluralityRO`. Nechť C je množina kandidátů a V je množina voličů. Volební pravidlo *Plurality with Run-Off*, značíme `PluralityRO`, je definováno Tento systém je dvoukolový. V prvním kole se pomocí plurality určí dva vítězové s nejlepším skóre. Do druhého kola postoupí pouze tito vítězové a Pluralita se použije ještě jednou.

Pravidlo 8 — `STV`. Volební systém nazvaný Single Transferable Vote je vícekolový. V každém kole je nejdříve aplikována Pluralita. Pokud má některá z alternativ alespoň $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ hlasů, pak je zvolena ta. V opačném případě je eliminována alternativa s nejmenším skóre. To se opakuje až do chvíle, kdy nemá některá z alternativ alspoň $\lfloor |V|/2 \rfloor + 1$ hlasů, tedy volby končí nejhůře tehdy, pokud nezbývají pouze dva kandidáti.

Pravidlo 9 — `Bucklin`. I Bucklinovo hlasování probíhá v kolech. Na začátku celého procesu je vypočítán treshold $t = \lfloor n/2 \rfloor + 1$. Potom vždy v i-tém kole je na volby aplikováno volební pravidlo i-APPROVAL. Pokud se objeví jeden kandidát $c \in C$ s alespoň t hlasy, pak volby končí. Jestliže nastane situace, kdy se v jednom kole naráz objeví více kandidátů, kteří se dostanou přes vypočtenou hranici t, jsou za vítěze označeni ti s největším skóre.

1.2 Vlastnosti volebních pravidel

Asi žádný poctivý občan nebude protestovat proti tvrzení, že ideální volební systém je takový, který co nejlépe odráží mínění všech voličů. Tento výkřik pochopitelně není matematická věta[6], kterou bychom se mohli zabývat, není totiž vůbec jasné, co znamená „nejlépe odrážet“ a dokonce ani „mínění voličů“.

Na dalších řádcích se tedy budeme věnovat některým vlastnostem, které mohou jednotlivé volební systémy mít. Později si ukážeme, které z těchto vlastností jsou navzájem kompatibilní.

1.2.1 Rovnost

Definice 1.6 Nechť C je množina kandidátů a V je množina voličů. Volební pravidlo f nazveme *diktátorské*, pokud existuje volič $v \in V$ takový, že pro každý profil preferencí $\mathscr{P} \in \mathscr{L}(C)^n$ platí

$$f(\mathscr{P}) = \{\max_{\succeq_v}(C)\}.$$

Voliče v nazveme *diktátorem*. Jestliže takový volič neexistuje, volební pravidlo nazveme *nediktátorské*.

V diktátorských pravidlech je tedy množina voličů vždy plně určena jedním jediným kandidátem a na hlasech ostatních voličů tak vůbec nezáleží. Ve slušných společnostech většinou diktátorská pravidla používat nechceme.

V rovném přístupu ke kandidátům ale můžeme jít ještě dál, jak ukazuje následující axiom.

Definice 1.7 Nechť C je množina kandidátů a V je množina voličů. Volební pravidlo f nazveme *anonymní*, pokud pro každý profil preferencí $\mathscr{P}$ a každou permutaci $\pi\colon V \to V$ platí

$$f(\mathscr{P} = (\succeq_1, \succeq_2, \ldots, \succeq_n)) = f((\succeq_{\pi(1)}, \succeq_{\pi(2)}, \ldots, \succeq_{\pi(n)})).$$

Jinými slovy, u anonymních volebních pravidel nezáleží na pojmenování voličů. Na vlastnost lze také nahlížet tak, že všichni voliči jsou si rovni.

Definice 1.8 Nechť C je množina kandidátů a V je množina voličů. Volební pravidlo f nazveme *neutrální*, pokud pro každý profil preferencí $\mathscr{P}$ a každou permutaci $\phi : C \to C$ platí

$$\phi(f(\mathscr{P} = (\succeq_1, \succeq_2, \ldots, \succeq_n))) = f((\phi(\succeq_1), \phi(\succeq_2), \ldots, \phi(\succeq_n))).$$

U neutrálních pravidel tedy nezáleží na pojmenování kandidátů. Taková pravidla tedy považují všechny kandidáty za rovnocenné.

1.2.2 Reakce na zvýšení podpory

Definice 1.9 Nechť C je množina kandidátů a V je množina voličů. Volební pravidlo f nazveme *Pareto efektivní* právě tehdy, když pro každé $\mathscr{P} \in \mathscr{L}(C)^n$ a pro každé $x \in C$ platí, že pokud existuje $y \in C$ takové, že $y \succ_v x$ pro každého voliče $v \in V$, pak $x \notin f(\mathscr{P})$.

Definice 1.10 Nechť C je množina kandidátů a V je množina voličů. Volební pravidlo f nazveme *jednomyslné*, pokud pro každý profil $\mathscr{P} \in \mathscr{L}(C)^n$ takový, že existuje $x \in C$ a pro

[6] Nicméně i podobná tvrzení mohou mít v matematice svůj význam, vzpomeňme například slavnou Church–Turingovu tezi.

každého $v \in V$ je $\max_{\succeq_v}(C) = x$, platí $f(\mathscr{P}) = x$.

Jednomyslná pravidla tedy v případě, že všichni voliči považují nějakého kandidáta x za nejlepšího, zvolí tohoto kandidáta x za jediného vítěze.

Definice 1.11 Nechť C je množina kandidátů a V je množina voličů. Volební pravidlo f nazveme *monotónní*, pokud pro každý profil $\mathscr{P} \in \mathscr{L}(C)^n$ a každého kandidáta $x \in C$ platí, že pokud $x \in f(\mathscr{P})$, pak pro každý profil $\mathscr{P}'$ takový, že někteří voliči posunuli x směrem k top alternativě, platí $x \in f(\mathscr{P}')$.

Monotonie tedy říká, že pokud je nějaký kandidát vítězem, měl by jím zůstat i v případě, že se nějaký volič rozhodne ho ohodnotit lépe. Alternativně se na monotónní pravidla lze dívat tak, že zlepšením pozice kandidáta x v nějakých hlasech tohoto kandidáta nepoškodíme.

Definice 1.12 Nechť C je množina kandidátů a V je množina voličů. Volební pravidlo f nazveme *positively responsive*, pokud pro každého kandidáta $c \in C$ platí, že jestliže $c \in f(\mathscr{P})$, pak $f(\mathscr{P}') = \{x\}$, kde $\mathscr{P}'$ je profil takový, že

$$|\{v \in V \mid x \succ_v^{\mathscr{P}'} y\}| > |\{v \in V \mid x \succ_v^{\mathscr{P}} y\}|.$$

Intuitivně vlastnost říká, že pokud je nějaký kandidát x mezi vítězi, pak v každém profilu takovém, že x se posune v uspořádání nějakých voličů dopředu, stane se x jediným vítězem. jedná se tedy o něco silnější vlastnost, než je monotonie.

1.2.3 Rozhodnost

Definice 1.13 Nechť C je množina kandidátů a V je množina voličů. Volební pravidlo f nazveme *rezolutní*, pokud pro každý profil $\mathscr{P} \in \mathscr{L}(C)^n$ existuje $c \in C$ takový, že $f(\mathscr{P}) = \{x\}$.

Rezolutní pravidla tedy pro každý profil preferencí zvolí vždy pouze jednu alternativu.

Definice 1.14 Nechť C je množina kandidátů a V je množina voličů. Volební pravidlo f nazveme *non-imposed*, pokud pro každého kandidáta $c \in C$ existuje nějaký profil $\mathscr{P} \in \mathscr{L}(C)^n$ takový, že $f(\mathscr{P}) = \{c\}$. V opačném případě nazveme pravidlo *imposed*.

2. Volba jedné ze dvou alternativ

> The absence of alternatives clears the mind marvelously.
>
> *Henry Kissinger*

2.1 Mayova věta

Věta 2.1 — Mayova věta (May 1952). Pro volby se dvěma kandidáty a lichým počtem voličů je `Plurality` jediné volební pravidlo, které je zároveň rezolutní, anonymní, neutrální a monotónní.

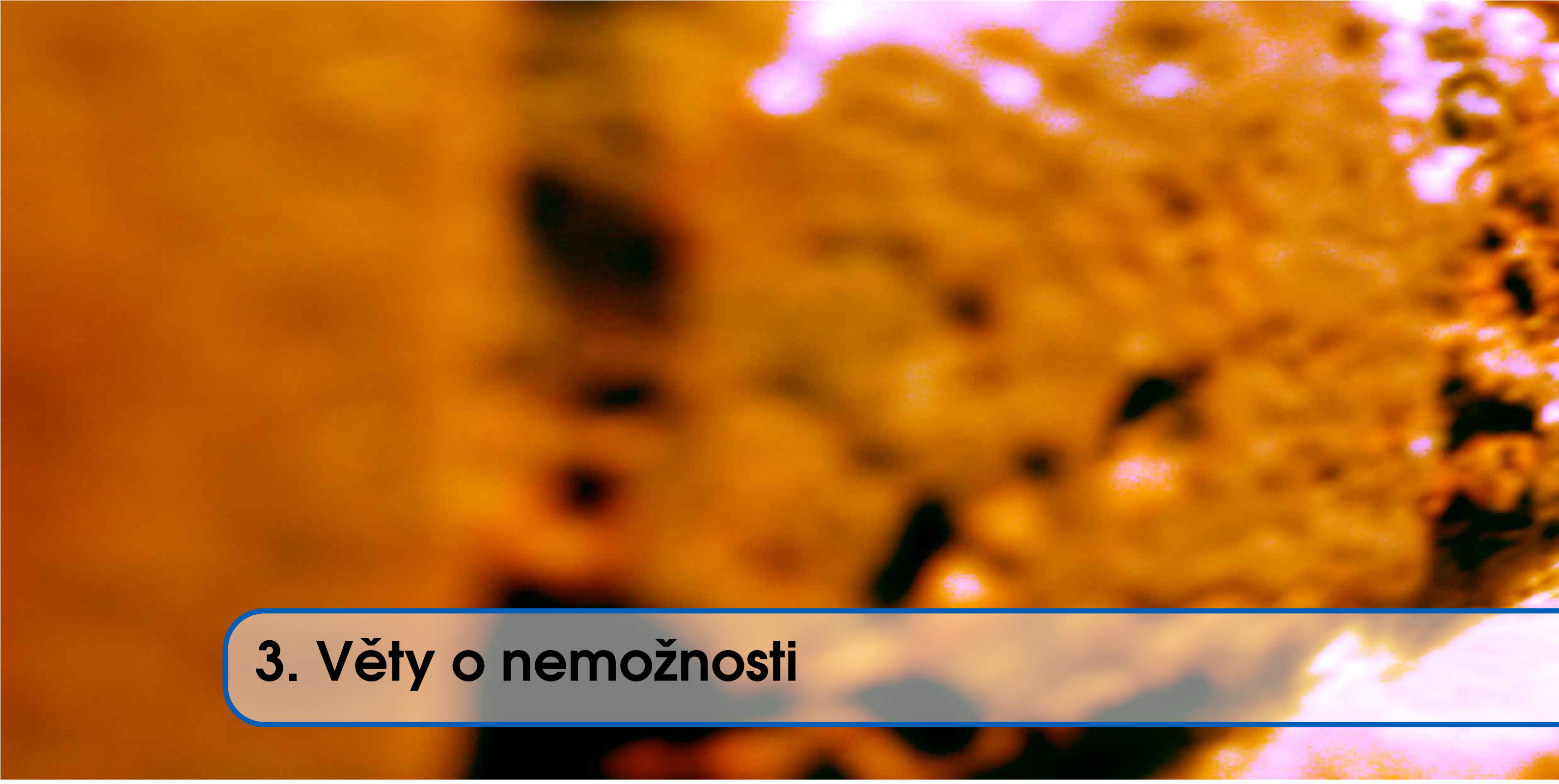
Důkaz. Důkaz implikace zleva doprava, tedy že `Plurality` opravdu splňuje všechny uvedené vlastnosti, necháme do cvičení, vizte Cvičení 2.1.

V opačném směru je třeba ukázat, že pokud nějaké volební pravidlo f splňuje uvedené vlastnosti, pak je nutně `Plurality`. Důkaz provedeme sporem. Nechť se množina kandidátů C skládá z kandidátů x a y a nechť f je volební pravidlo, které není `Plurality`.

Jelikož je f různé od `Plurality`, existuje alespoň jeden profil preferencí, kde se výsledek f a `Plurality` liší. Označme tento profil $\mathscr{P}$. Víme, že jak f, tak `Plurality` jsou rezolutní, tedy na tomto profilu $\mathscr{P}$ zvolí právě jednoho kandidáta. Bez újmy na obecnosti, ať `Plurality` zvolí kandidáta x a f zvolí kandidáta y. Protože `Plurality` zvolila pro profil $\mathscr{P}$ kandidáta x, pak v $\mathscr{P}$ existuje striktně více hlasů ve tvaru $x \succ y$ než $y \succ x$. Nyní vytvoříme novou instanci voleb, kde prohodíme jména kandidátů. Označme odpovídající profil preferencí v pozměněné instanci $\mathscr{P}'$. Jelikož jsou f i `Plurality` neutrální, pak pro profil $\mathscr{P}'$ volí f kandidáta x a `Plurality` volí kandidáta y. Navíc, díky anonymitě, můžeme z $\mathscr{P}'$ přejmenováním voličů vytvořit nový profil $\mathscr{P}''$ takový, kde co nejvíce voličů, kteří v $\mathscr{P}$ měli hlas $x \succ y$ měli stejný hlas i v $\mathscr{P}''$, a identicky i pro voliče s hlasem $y \succ x$ v $\mathscr{P}$. Nyní můžeme voliče rozdělit na tři skupiny $V_{x,x}$, $V_{y,y}$ a $V_{x,y}$, kde $V_{i,j}$ představuje množinu voličů s hlasem $i \succ C \setminus \{i\}$ v $\mathscr{P}$ a $j \succ C \setminus \{j\}$ v $\mathscr{P}''$. Všimněme si, že $V_{x,x} \cup V_{y,y} \cup V_{x,y} = V$. Pak ale každý volič ze skupiny $V_{x,y}$, která nutně obsahuje alespoň jednoho voliče, oproti profilu $\mathscr{P}$ pouze zlepšil pozici kandidáta y, tedy dle monotonie by měla f pro profil $\mathscr{P}''$ zvolit y, ale volí x, což je spor. Takové pravidlo f tedy nemůže existovat. ■

Cvičení

Cvičení 2.1 Dokažte, že `Plurality` je pro instance voleb s lichým počtem voličů a dvěma kandidáty rezolutní, anonymní, neutrální a monotónní. Jinými slovy, dokažte vynechanou implikaci z důkazu Věty 2.1.



3. Věty o nemožnosti

Arrow[1]

Věta 3.1 — Arrow's impossibility theorem, 1951. Nechť (C,V) jsou volby s $|C| \geq 3$ alternativami a f je social-choice funkce založená na preferencích. Potom f nemůže být zároveň rezolutní, nediktátorská, Paretovsky konzistentní a nezávislá na irelevantních alternativách.

Zde si předvedeme jednu z verzí zjednodušeného důkazu. Zvídavý čtenář, který by chtěl vidět více jednoduchých důkazů, nechť vyhledá (Geanakoplos 2001).

První důkaz Věty 3.1. Důkazů předchozí věty existuje hned několik, my vyjdeme z vlastností předepsaných Paretovskou konzistencí a nezávislostí na irelevantních alternativách, a ukážeme, že takový systém musí obsahovat diktátora. Nejdříve si ale zavedeme následující pomocné lemma.

Lemma 3.2 Nechť (C,V) jsou volby a $|C| \geq 3$. Jestliže existuje $b \in C$ takové, že pro každý profil $v \in V$ je b buď top alternativa, nebo je naopak poslední, potom je b top alternativa, respektive poslední pro každou social-choice funkci takovou, že je Paretovsky konzistentní a zároveň nezávislá na irelevantních alternativách.

Důkaz Lemma 3.2. Ať je f social-choice funkce, která je zároveň Paretovsky konzistentní a nezávislá na irelevantních alternativách. Dále nechť $b \in C$ je v každém profilu buď top alternativa, případně poslední, a zároveň není pravda, že je ve výsledku top alternativa, případně že je poslední. Tedy existují $a, c \in C$ takové, že ve výsledku je $a \succ b \succ c$, kde $\succ$ je dáno výsledkem f na (C,V).

Vytvořme tedy profil $\mathscr{P}_2$, který bude kopií původního profilu s tou výjimkou, že v profilu preferencí každého voliče dáme c těsně před a. Ať $\succ^2$ je dána výsledkem f na $\mathscr{P}_2$. Dle paretovské konzistence bude tedy ve výsledku jistě platit $c \succ^2 a$.

V $\mathscr{P}_2$ je zároveň zachována relativní pozice mezi a a b a b a c, tedy

$$a \succ^2 b \succ^2 c,$$

[1] Kenneth Joseph Arrow (1921–2017) byl americký matematik, ekonom, spisovatel a politický teoretik. Málokterého posluchače našich přednášek překvapí, že je i držitelem Nobelovy ceny za ekonomii. Tento velice slavný výsledek publikoval v roce 1951 ve své disertační práci.

což ale porušuje tranzitivitu, tedy jsme došli ke sporu. ■

Nyní využijeme lemma 3.2 abychom ukázali, že v social-choice funkci s vlastnostmi dle věty 3.1 musí existovat diktátor.

Můžeme si všimnout, že pokud vezmeme libovolnou social-choice funkci a přidáme nového kandidáta b na začátek všech profilů preferencí, pak bude jistě na první pozici i ve výsledku. A naopak, pokud b přidáme na konec všech profilů, pak bude i ve výsledku b poslední.

Vezměme tedy dále nějaké volby (C,V) a přidejme novou alternativu b na konec všech profilů preferencí. Postupně pro voliče $v_1,\dots,v_n$ přesouvejme v profilech preferencí alternativu b na první pozici. Potom jistě existuje nějaký volič v^*, u kterého když dojde k přesunu, pak b poprvé stane na první pozici.

Můžeme si ale všimnout, že v takto „zamraženém“ profilu volič v^* diktuje pozici alternativy b. Pro dokončení důkazu ukážeme, že v^* diktuje nejen pozici alternativy b, ale je diktátorem pro celé volby, tedy pozice libovolných dvou alternativ $a,c \in C \setminus \{b\}$ dopadne dle preferencí voliče v^*.

Jako $\mathscr{P}_\top$ předchozí profil, ve kterém má v^* alternativu b na první pozici, a $\mathscr{P}_\perp$ takovou, kde má v^* alternativu b zcela vespod svých preferencí.

Nyní vytvořme z profile $\mathscr{P}_\top$ profil $\mathscr{P}_a$ takový, že v^* přesune a před b a ostatní voliči své preference libovolně přeskládají. Jelikož použité volební pravidlo bylo nezávislé na irelevantních alternativách, musí jistě platit následující. Označme $\succ^a$ výsledek pro profil $\mathscr{P}_a$, pak je jistě $a \succ^a b$, jelikož relativní pozice mezi a a b jsou stejné, jako v $\mathscr{P}_\perp$.

Zároveň ale platí $b \succ^a c$, jelikož relativní pozice jsou stejné, jako v $\mathscr{P}_\top$. Dle tranzitivity je $a \succ^a c$ bez ohledu na to, jak ostatní voliči zpřeházeli své preference. Jediný, na kom záleží, je tedy v^*. Tedy v každém na preferencích založeném volebním pravidlu, které je paretovsky konzistentní a nezávislé na irelevantních alternativách existuje diktátor. ■

Věta 3.3 — Gibbard, 1973, Satterthwaite, 1975. Nechť V je množina voličů a C je množina kandidátů. Potom žádný volební systém založený na preferencích nemůže být zároveň
i) nediktátorský,
ii) rezolutní,
iii) občansky svrchovaný a
iv) odolný na strategii.

Důkaz bude probíhat podobným způsobem, jako tomu bylo u Arrowovy věty. Dokonce existují důkazy, které ukážou platnost obou vět naráz. Nejdříve přestavíme několik pomocných tvrzení, které následně využijeme v samotném důkazu.

Lemma 3.4 Nechť V je množina voličů a C je množina kandidátů, $\mathscr{P}$ nějaký profil, f je volební systém s vlastnostmi podle věty 3.3 a $a \in C$ je vítěz těchto voleb. Vezměme $\mathscr{P}'$, kde $\mathscr{P}'$ vzniká z $\mathscr{P}$ tak, že právě jeden volič $v \in V$ vylepší pozici $b \in C$ jeho posunem v profilu preferencí. Potom buď $f(C,V,\mathscr{P}') = a$, nebo $f(C,V,\mathscr{P}') = b$.

Důkaz. Pro spor uvažujme, že volby vyhraje nějaký kandidát $c \in C$ takový, že $c \neq a$ a $c \neq b$. Pokud by platilo $c \succ_v a$, potom na profilu $\mathscr{P}$ může volič v manipulovat na $\mathscr{P}'$ a tím si polepší. My ale předpokládáme, že volební systém má vlastnost iv), tedy taková situace nemůže nastat.

Tedy musí platit $a \succ_v c$. Potom ale na profilu $\mathscr{P}'$ může v manipulovat na $\mathscr{P}$ a polepší si tím. To je ale opět spor s tím, že je f odolná na strategii, tedy c nemůže být vítěz. ■

Profily v důkazu a jejich znázorňování

Podobně jako v důkazu předchozího lemmatu budeme v důkazu dalších tvrzení využívat vlastnosti manipulovatelnosti na dvojici profilů – povětšinou nějaký význačnější profil a profil od něho odvozený. Pro lepší orientaci budeme profily znázorňovat pomocí diagramů tak, že v prvním řádku tučně zapíšeme číslo voliče a pod ním pak zobrazíme jeho profil, pričemž jeho nejlepší volba je v řadku pod ním (odděleném čarou) a tak dále až k nejhorší volbě v řádku posledním. Uveď me nejpre již známé profily $\mathscr{P}_\top$ a $\mathscr{P}_\perp$ v této notaci opět pro kandidáta b (voliče v^* nalezneme za chvíli).

$$\mathscr{P}_\top = \begin{array}{ccccccc} \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{v}^*_- & \mathbf{v}^* & \mathbf{v}^*_+ & \cdots & \mathbf{n} \\ \hline b & \cdots & b & b & ? & \cdots & ? \\ ? & \cdots & ? & ? & ? & \cdots & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ? & \cdots & ? & ? & b & \cdots & b \end{array} \qquad \mathscr{P}_\perp = \begin{array}{ccccccc} \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{v}^*_- & \mathbf{v}^* & \mathbf{v}^*_+ & \cdots & \mathbf{n} \\ \hline b & \cdots & b & ? & ? & \cdots & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ? & \cdots & ? & ? & ? & \cdots & ? \\ ? & \cdots & ? & b & b & \cdots & b \end{array}$$

A ještě dva profily – jeden extrémně pozitivní $\mathscr{P}_{\mathbf{b}+}$ pro b a jeden extrémně negativní $\mathscr{P}_{\mathbf{b}-}$ pro b:

$$\mathscr{P}_{\mathbf{b}+} = \begin{array}{ccccccc} \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{v}^*_- & \mathbf{v}^* & \mathbf{v}^*_+ & \cdots & \mathbf{n} \\ \hline b & \cdots & b & b & b & \cdots & b \\ ? & \cdots & ? & ? & ? & \cdots & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ? & \cdots & ? & ? & ? & \cdots & ? \end{array} \qquad \mathscr{P}_{\mathbf{b}-} = \begin{array}{ccccccc} \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{v}^*_- & \mathbf{v}^* & \mathbf{v}^*_+ & \cdots & \mathbf{n} \\ \hline ? & \cdots & ? & ? & ? & \cdots & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ? & \cdots & ? & ? & ? & \cdots & ? \\ b & \cdots & b & b & b & \cdots & b \end{array}$$

Nyní si opět povšimneme, že vlastnosti i)–iv) garantují existenci voliče v^*, který je velice důležitý pro kandidáta b. Není těžké nahlédnout, že v profilu $\mathscr{P}_{\mathbf{b}+}$ zvítězí kandidát b a v profilu $\mathscr{P}_{\mathbf{b}-}$ naopak kandidát b není vítězem. Tedy začneme-li s libovolným profilem $\mathscr{P}_{\mathbf{b}-}$ a budeme-li postupně měnit hlasy tak, že kandidáta b posuneme na první pozici voliče 1, poté voliče 2 a tak dále, pak po každé změně se buď vítež nezmění nebo se jím stane b (Lemma 3.4). Označme v^* toho voliče, který změnou svého hlasu způsobil, že b vyhraje. Stejně jako v případě Arrowovy věty bude naším cílem ukázat, že v^* je *diktátor*.

Lemma 3.5 Ať $\hat{\mathscr{P}}$ je profil vzniklý z profilu $\mathscr{P}_\top$ libovolnou změnou právě jednoho hlasu za v^*. Potom $f(C,V,\hat{\mathscr{P}}) = b$.

Důkaz. Označme $\bar{v}$ voliče, který mění svůj hlas. Pokud by lemma neplatilo, pak by $\bar{v}$ manipuloval volby, neboť by změnou musel vyhrát kandidát, který je dle $\bar{v}$ lepší než b (však b je v $\mathscr{P}_\top$ jeho nejhorší alternativa). To by ale $\bar{v}$ mohl na profilu $\mathscr{P}_\top$ zmanipulovat na tento profil, což je ale spor s iv). ■

Lemma 3.6 Ať $\hat{\mathscr{P}}$ je profil vzniklý z profilu $\mathscr{P}_\top$ změnou právě jednoho hlasu před v^* takovou, že b zůstane top volbou. Potom $f(C,V,\hat{\mathscr{P}}) = b$.

Důkaz. Označme $\bar{v}$ voliče, který upravil svůj hlas. Jelikož v preferencích $\bar{v}$ je b na prvním místě, může si touto změnou $\bar{v}$ pouze pohoršit – tedy by z profilu $\hat{\mathscr{P}}$ měl tendenci manipulovat na $\mathscr{P}_\top$, což je spor s vlastností iv). ■

Platí tedy, že pokud je b na první pozici všech voličů až do v^* včetně, potom jistě vyhraje b. Nazvěme tuto vlastnost b-pozitivitou a označme ji $\mathbf{b}+$.

Lemma 3.7 Ať $\hat{\mathscr{P}}$ je profil vzniklý z profilu $\mathscr{P}_\perp$ libovolnou změnou právě jednoho hlasu před v^* , potom $f(C,V,\hat{\mathscr{P}}) \neq b$.

Důkaz. Označme $\bar{v}$ voliče, který změnil svůj hlas. Pokud by se po změně hlasu b stal vítězem, pak by mohl $\bar{v}$ manipulovat z $\mathscr{P}$ na $\hat{\mathscr{P}}$, což je ale spor s vlastností iv). ■

Lemma 3.8 Ať $\hat{\mathscr{P}}$ je profil vzniklý z profilu $\mathscr{P}_\perp$ změnou právě jednoho hlasu za v^* takovou, že b zůstane v profilu poslední volbou. Potom $f(C,V,\hat{\mathscr{P}}) \neq b$.

Důkaz. Označme $\bar{v}$ voliče, který změnil svůj hlas. Jestliže b po změně není vítěz, lemma platí. Ať se tedy b stane vítězem voleb. Potom ale bude mít $\bar{v}$ tendenci manipulovat do profilu $\mathscr{P}$, což je ale spor s vlastností iv). ■

Pokud je b naopak na nejhorší pozici za v^* včetně, potom b nikdy nevyhraje. Tuto vlastnost si označíme jako **b**$-$ a nazýváme ji b-negativita.

Důkaz věty 3.3. Uvažme nejprve následující profil:

$$\mathscr{P}_k = \begin{array}{ccccccc} \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{v}^*_- & \mathbf{v}^* & \mathbf{v}^*_+ & \cdots & \mathbf{n} \\ \hline ? & \cdots & ? & k & ? & \cdots & ? \\ ? & \cdots & ? & ? & ? & \cdots & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ? & \cdots & ? & ? & ? & \cdots & ? \\ b & \cdots & b & b & b & \cdots & b \end{array}$$

Ukážeme, že v profilu $\mathscr{P}_k$ vyhraje alternativa k. Víme, že pokud by kandidát k byl nejlepší volbou pro všechny voliče, pak by k musel vyhrát. Zaměřme se tedy na lehce modifikovaný profil.

$$\hat{\mathscr{P}}_k = \begin{array}{ccccccc} \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{v}^*_- & \mathbf{v}^* & \mathbf{v}^*_+ & \cdots & \mathbf{n} \\ \hline b & \cdots & b & k & k & \cdots & k \\ k & \cdots & k & ? & ? & \cdots & ? \\ ? & \cdots & ? & ? & ? & \cdots & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ? & \cdots & ? & ? & ? & \cdots & ? \\ ? & \cdots & ? & b & b & \cdots & b \end{array}$$

Z b-negativity dostáváme, že v profilu $\hat{\mathscr{P}}_k$ nemůže vyhrát b. Dále víme, že pokud v^* posune b na svou top pozici (tedy tu nejlepší), pak se vítězem stane právě b. Nyní z Lemmatu 3.4 dostáváme, že k vyhrává v profilu $\hat{\mathscr{P}}_k$, neboť ten můžeme získat z profilu

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{v}^*_- & \mathbf{v}^* & \mathbf{v}^*_+ & \cdots & \mathbf{n} \\ \hline k & \cdots & k & k & k & \cdots & k \\ ? & \cdots & ? & ? & ? & \cdots & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ? & \cdots & ? & ? & ? & \cdots & ? \\ b & \cdots & b & b & b & \cdots & b \end{array}$$

postupným posunem b směrem vzhůru (vždy po každé aplikaci posunu se vítěz buď nemění nebo se jím stává b – to ale nastane až po změně u v^*). Máme tedy:

Pozorování 1. $f(C,V,\hat{\mathscr{P}}_k) = k$.

Tvrzení 1. *Platí, že* $f(C,V,\mathscr{P}_k) = k$.

Důkaz. Uvažme pro spor, že $f(C,V,\mathscr{P}_k) = g$ pro nějaké $g \in C \setminus \{k\}$. Dále uvažme profil $\mathscr{P}_b$, který vznikne z $\mathscr{P}_k$ posunutím b vzhůru v prferencích voličů 1 až v^* (kde u posledního pouze na druhou pozici, jinak na top).

$$\mathscr{P}_b = \begin{array}{ccccccc} \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{v}^*_- & \mathbf{v}^* & \mathbf{v}^*_+ & \cdots & \mathbf{n} \\ \hline b & \cdots & b & k & ? & \cdots & ? \\ ? & \cdots & ? & b & ? & \cdots & ? \\ ? & \cdots & ? & ? & ? & \cdots & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ? & \cdots & ? & ? & ? & \cdots & ? \\ ? & \cdots & ? & ? & b & \cdots & b \end{array}$$

Z Lemma 3.4 víme, že v $\mathscr{P}_b$ může vyhrát buď b nebo g. My ale navíc z b-negativity dostaneme, že $f(C,V,\mathscr{P}_b) = g$.

No ale pokud bychom v $\mathscr{P}_b$ posunuli b na top pozici v hlasu v^*, pak víme, že vyhraje b. To je ale problém, protože v $\mathscr{P}_b$ může v^* takovouto manipulací vylepšit výsledek voleb a tudíž získáváme spor s iv).

Pozorování 2. *Dostáváme* $f(C,V,\mathscr{P}_b) = b$. $\triangleleft$

Pojď me nyní upravit profil $\mathscr{P}_b$:

- posuneme k na druhou pozici ve všech hlasech před v^* a
- posuneme b na první pozici ve všech hlasech za v^*.

V takovém profilu jistě vyhraje b, neboť voliči před v^* by mohli manipulovat volbu tak, že by se raději „vraceli“ k profilu $\mathscr{P}_b$ a tím si polepšili. (A ostatní voliči jen vylepšili pozici b.) Co jsme to ale vytvořili za profil? Získali jsme profil $\hat{\mathscr{P}}_k$! Ale to je finální spor s Pozorováním 1 – tvrzení je tedy dokázáno. $\triangleleft$

Tvrzení o profilu $\mathscr{P}_k$ je sice pěkné, ale není to přesně to, co my bychom chtěli. Připomeňme si, že naším cílem je ukázat, že v^* je diktátor a tedy, že k je vítězem v profilu:

$$\mathscr{P}_? = \begin{array}{ccccccc} \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{v}^*_- & \mathbf{v}^* & \mathbf{v}^*_+ & \cdots & \mathbf{n} \\ \hline ? & \cdots & ? & k & ? & \cdots & ? \\ ? & \cdots & ? & ? & ? & \cdots & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ? & \cdots & ? & ? & ? & \cdots & ? \end{array}$$

Přesto nám bude tvrzení značně nápomocné. Víme totiž, že pokud necháme „spadnout“ b ve všech hlasech v profilu $\mathscr{P}_?$ na poslední pozice, dostaneme profil $\mathscr{P}_k$, kde je vítězem k. Původní profil pak získáme tak, že budeme „vracet“ b na jeho původní pozice (postupně pořadě v hlasech $1,2,\ldots$). Lemma 3.4 nám říká, že po každé změně je vítězem buď k a nebo b. Pokud bychom tedy vrátili b ve všech hlasech a vítěz se nezměnil, jsme hotovi.

Uvažme následující profil $\mathscr{P}_c$ (kde $c \neq b$, $c \neq k$ a $b \neq k$).

$$\mathscr{P}_c = \begin{array}{ccccccc} \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{v}^*_- & \mathbf{v}^* & \mathbf{v}^*_+ & \cdots & \mathbf{n} \\ \hline b & \cdots & b & b & a & \cdots & a \\ ? & \cdots & ? & ? & ? & \cdots & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ? & \cdots & ? & ? & ? & \cdots & ? \\ c & \cdots & c & c & c & \cdots & c \end{array}$$

A opět postupně posunujme c na top pozici popořadě v hlasech $1,2,\cdot$ – takto objevíme diktárora pro c, kterého označíme w^*. Vrať me se teď ale na chvíli k profilu $\mathscr{P}_c$ – tam má w^* nějakou top volbu (buď a nebo b) a my navíc z b-pozitivity víme, že $f(C,V,\mathscr{P}_c) = b$. Dále aplikováním Tvrzení 1 na profil $\mathscr{P}_c$ a voliče w^* diktujícího pozici alternativy c získáme, že musí platit, že $f(C,V,\mathscr{P}_c)$ je top volba voliče c. Ergo w^* musí být před v^*.

Na druhou stranu, pokud bychom ale „začali důkaz znovu“, tentokrát pro w^* a alternativu c a v závěru (symetricky) na jejich místě použili b a v^*, dostaneme, že v^* je před w^*. Tedy dohromady získáváme, že v^* je w^*. A tudíž, v^* je diktátor nejen vzhledem k alternativě b, ale i pro c.

Vrať me se nyní k profilu $\mathscr{P}_?$. Výše jsem pozorovali, že v něm platí $f(C,V,\mathscr{P}_?) \in \{b,k\}$ (tak, že „propadneme a vracíme“ b). Stejným argumentem, tentokrát „propadneme a vracíme“ c dostáváme, že $f(C,V,\mathscr{P}_?) \in \{c,k\}$. Jelikož ale máme $b \neq c$, musí platit $f(C,V,\mathscr{P}_?) = k$.

Případ kdy $k = b$ ponecháme laskavému čtenáři jako cvičeni (není težké jej odvodit obdobnými argumenty). ■

4. Výpočetní složitost volby vítěze

Doposud jsme představili několik volebních systémů volby vítěze, zkoumali jsme jejich vlastnosti a nakonec jsme dokázali několik vět o nemožnosti.

U voleb můžeme ale zkoumat i jiné vlastnosti. Například by nás mohlo zajímat, zda můžeme, pokud máme k dispozici nekompletní profil preferencí například ve tvaru

$$\{a,c\} \succ \{d,b\},$$

ovlivnit voliče tak, aby se náš vybraný kandidát stal vítězem. Tento pohled na volby nazýváme hledání *možného vítěze*.

Jindy nás může zajímat, zda ve volbách existuje nějaký kandidát, který bude pro libovolné rozšíření nekompletního profilu preferencí vždy vítězem. V takovém případě se zajímáme o *nutného vítěze*.

My ovšem zůstaneme ještě u hledání vítěze a budeme studovat výpočetní složitost hledání vítěze ve vybraných volebních systémech. Někteří čtenáři mohli po závěru poslední přednášky propadnout skepsi vůči volbám. Proto Bartholdi III, Tovey a Trick 1989 přišli s nápadem, založit bezpečnost voleb, podobně jako v kryptografii, na přílišné časové složitosti najití manipulace.

Nyní tedy formálněji definujeme problém hledání vítěze ve volbách a dále se budeme věnovat výpočetní složitosti tohoto systému pro různé systémy.

Definice 4.1 ε-WINNER Vstupem problému ε-WINNER je množina kandidátů C, množina voličů V a profil preferencí $\mathscr{P}$. Úkolem pak je určit množinů $W \subseteq C$ vítězů voleb při profilu preferencí voličů $\mathscr{P}$ a za použití volebního systému ε.

Najít vítěze ve většině volebních systémů, které jsme v minulých přednáškách představili, lze poměrně snadno v polynomiálním čase. Složitost jsme konstatovali pouze v případě `Dodgson`, `Young` a `Kemeny`. Na dalších stranách bychom rádi ukázali, jak těžké hledání vítězů v těchto systémech ve skutečnosti je.

Definice 4.2 Ať je $\mathscr{M}$ orákulový deterministický Turingův stroj s přístupem k orákulu pro NP-úplný jazyk X, který v čase polynomiálním s velikostí vstupu vytvoří sadu dotazů $\varphi_1, \dots, \varphi_t$.

Tyto dotazy jsou následně předány t NP-orákulím pro X, které paralelně spočítají odpověď $a_1, \dots, a_t \in \{0,1\}$ takové, že $a_i = 1$ právě tehdy když $\varphi_i \in X$ a stroj $\mathscr{M}$ na základě této odpovědi v polynomiálním čase problém rozhodne.

Třídu problémů, pro které existuje Turingův stroj dle definice výše značíme $\mathsf{P}_{||}^{\mathsf{NP}}$ a říkáme, že se jedná o problémy řešitelné v polynomiálním čase na deterministickém Turingově stroji s paralelním přístupem k NP-orákulím.

Nyní si definujeme dva problémy, které budeme dále používat v těžkostní redukci, která ukáže, že problém nalezení vítěze v `Young` je těžký pro třídu $\mathsf{P}_{||}^{\mathsf{NP}}$, a dokonce je pro ni úplný (náležení v této třídě je malé pozorování).

Definice 4.3 Vstupem problému MAXIMUM SET PACKING COMPARE (MSPC) jsou dvě konečné neprázdné množiny B_1, B_2 a systémy neprázdných podmnožin $\mathscr{S}_i \subseteq 2^{B_i}$, kde $i \in \{1,2\}$. Otázkou je, zda platí, že $\kappa(\mathscr{S}_1) \geq \kappa(\mathscr{S}_2)$, kde $\kappa(\mathscr{S}_i)$ je maximální velikost $\mathscr{S}_i' \subseteq \mathscr{S}_i$ takové, že $S, T \in \mathscr{S}_i'$, $S \neq T \implies S \cap T = \emptyset$?

Na tomto místě pouze konstatujeme, že problém MAXIMUM SET PACKING COMPARE je $\mathsf{P}_{||}^{\mathsf{NP}}$-úplný. My bude speciálně využívat toho, že je $\mathsf{P}_{||}^{\mathsf{NP}}$-úplný i ve chvíli, kde $\kappa(\mathscr{S}_i) \geq c$, kde $i \in \{1,2\}$ a $c \in \mathbb{N}$ je libovolná konstanta.

Prvním volebním systémem, pro který byla ukázána jeho úplnost vzhledem ke třídě $\mathsf{P}_{||}^{\mathsf{NP}}$, byl `Dodgson`. Není bez zajímavosti, že se jednalo o první přirozený problém, který je pro tuto třídu úplný. Jak bylo řečeno, my chceme ukázat, že $\mathsf{P}_{||}^{\mathsf{NP}}$-úplný je i `Young`, proto definujeme následující problém.

Definice 4.4 Vstupem problému YOUNG-RANKING je množina kandidátů C, množina voličů V, profil preferencí $\mathscr{P}$ a dvojice kandidátů $c, d \in C$. Úkolem je pak rozhodnout, zda platí, že $\text{score}_{\texttt{Young}}(c) \geq \text{score}_{\texttt{Young}}(d)$?

Než se pustíme do samotného důkazu, poznamenejme, že se zda maličko odchýlíme od naší definice Youngova skóre. My jsme definovali toto skóre jako nejmenší možný počet voličů, které je třeba z voleb odebrat, aby se daný kandidát stal (slabým) Condorcetovým vítězem.

Pro účely důkazu je ale jednodušší definovat „doplňkové skóre“, tedy maximální počet voličů, pro které je daný kandidát Condorcetovým vítězem. Vítězem je pak v takovémto systému přirozeně ten kandidát, který takovéto skóre maximalizuje. Není těžké nahlédnout, že tyto definice jsou ekvivalentní.

Věta 4.1 Problém YOUNG-RANKING je $\mathsf{P}_{||}^{\mathsf{NP}}$-úplný.

Důkaz. Pro kompletní důkaz je třeba ukázat, že YOUNG-RANKING vůbec do třídy $\mathsf{P}_{||}^{\mathsf{NP}}$ patří a že se na něj redukují všechny ostatní problémy z této třídy.

Nejdříve ukážeme první část, totiž že problém je opravdu v $\mathsf{P}_{||}^{\mathsf{NP}}$. V jedné z minulých přednášek jsme konstatovali, že najít skóre kandidáta v `Young` je v NP. My proto algoritmus pro výpočet Youngova skóre využijeme jako NP-orákula. Položené dotazy pak budou mít podobu

$$(C, V, \mathscr{P}, k, c)$$

pro každé $k \in \{1, \dots, |V|\}$ a

$$(C, V, \mathscr{P}, k, d)$$

opět pro každé k z množina $\{1, \dots, |V|\}$. Jelikož vygenerování dotazů a výpočet vítěze jistě stihneme v polynomiálním čase, pak dostáváme, že YOUNG-RANKING je ve třídě $\mathsf{P}_{||}^{\mathsf{NP}}$.

Dále musíme dokázat, že YOUNG-RANKING je $\mathsf{P}_{||}^{\mathsf{NP}}$-těžký. To ukážeme redukcí z problému MAXIMUM SET PACKING COMPARE. Buď $(B_1, B_2, \mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2)$ instance problému MSPC. Označme prvky množin B_1 a B_2 následovně

$$B_1 = \{x_1, \ldots, x_m\} \qquad B_2 = \{y_1, \ldots, y_n\},$$

kde m, n tentokrát nepředstavují počet kandidátů a voličů, ale opravdu velikosti množin B_1 a B_2.

Dále definujme množinu kandidátů C jako

$$C = B_1 \cup B_2 \cup \{a, b, c, d\},$$

a zafixujeme pořadí kandidátu. Množinu voličů V lze rozdělit na šest skupin podle podoby profilu preferencí následovně

(1) $\forall E \in \mathscr{S}_1 \colon E \succ a \succ c \succ \bar{E} \succ B_2 \succ b \succ d$,
(2) $c \succ B_1 \succ a \succ B_2 \succ b \succ d$,
(3) $|\mathscr{S}_1| - 1 \colon B_1 \succ c \succ a \succ B_2 \succ b \succ d$,
(4) $\forall F \in \mathscr{S}_2 \colon F \succ b \succ d \succ \bar{F} \succ B_1 \succ a \succ c$,
(5) $d \succ B_2 \succ b \succ B_1 \succ a \succ c$,
(6) $|\mathscr{S}_2| - 1 \colon B_2 \succ d \succ b \succ B_1 \succ a \succ c$

Dohromady tedy platí $|V| = 2 \cdot |\mathscr{S}_1| + 2 \cdot |\mathscr{S}_2|$.

Než se více ponoříme do vlastního důkazu, všimneme si, že výše uvedené hlasy jsou symetrické vzhledem k (a, c) a (b, d) – tedy prohozením a a c za b a d vznikne „negovaná instance" (tedy se jedná o *yes*-instanci právě tehdy, když původní instance byla *no*-instance).V následující diskusi i zbytku důkazy se budeme proto zabývat pouze tím, jaké skóre má kandidát c (pro d je zjevně argument obdobný).

Dále si všimneme, že hlas (2) je pro kandidáta c ten nejlepší možný a že hlasy (4)–(6) nikdy nebudeme do daných voleb (kde má c být Condorcetovým vítězem) uvažovat, neboť v nich je c poslední.

Jaký je ale význam kandidáta a? Všimneme si, že ve hlasech ze skupiny (1) vždy a poráží c – tedy za každého takovéhoto voliče ve volbách je třeba „vyvážit" nějakým voličem ze skupin (2) nebo (3).

Protože ale máme jen jednoho voliče (2), budeme používat celkem dost voličů ze skupiny (3), ti ale upřednostňují kandidáty z množiny B_1. Celkově tedy vidíme, že ve vzniklé konstrukci jdou tyto dva naše záměry „proti sobě".

Pojďme nyní formalizovat tyto neformálně uvedené myšlenky skrývající se za důkazem.

Lemma 4.2 $\mathrm{score}_{\mathtt{Young}}(c) \geq 2 \cdot \kappa(\mathscr{S}_1)$.

Důkaz. Jistě se nám vyplatí použít voliče ze skupiny (2). Zároveň víme, že existuje nějaké $\mathscr{S}_1' \subseteq \mathscr{S}_1$ takové, že $\mathscr{S}_1'$ je svědek $\kappa(\mathscr{S}_1)$. Pokud si za každé $E \in \mathscr{S}_1'$ vezmeme jeden hlas ze skupiny (1), pak platí, že $\forall x \in B_1$ je maximálně jednou $x \succ_E c$ a alespoň $(\kappa(S_1) - 1)$-krát $c \succ_E x$. Toto lze tedy doplnit pomocí $\kappa(\mathscr{S}_1) - 1$ voličů ze skupiny (3). Není těžké ověřit, že v takto zkonstruovaných volbách zúžených vždy na dva kandidáty je výsledek mezi c a

- kandidátem a nerozhodný,
- libovolným kandidátem v množině $\cup_{S \in \mathscr{S}_1'} S$ nerozhodný a
- libovolným jiným kandidátem ve prospěch c.

Tedy c je slabým Condorcetovým vítězem a lemma je dokázáno. ∎

Lemma 4.3 Buď $3 \leq \lambda \leq |\mathscr{S}_1|$ a $V_\lambda \subseteq V$ libovolná podmnožina voličů taková, že

a) V_λ obsahuje právě λ hlasů ze skupin (2) a (3).
b) c je slabý Condorcetův vítěz ve volbách (C, V_λ) s profilem preferencí $\mathscr{P}$.

Potom V_λ nutně

i) obsahuje právě λ hlasů ze skupiny (1) takových, že reprezentují disjunktní množiny, a
ii) neobsahuje žádné další hlasy, tedy $|V_\lambda| = 2\lambda$.

Důkaz. Vezměme libovolné ale pevné λ a V_λ splňující předpoklady tvrzení. Víme, že hlas ze skupiny (2) existuje právě jeden, tedy je alespoň $\lambda - 1$ hlasů typu (3). Pro každé $x \in B_1$ pak platí, že poráží c v alespoň $\lambda - 1$ hlasech. My ale víme, že λ je alespoň 3, tedy počet použitých hlasů ze skupiny (3) bude jistě větší, než 1. Aby c bylo vítězem, musí nutně V_λ obsahovat hlas ze skupiny (1) za nějakou $E \in \mathscr{S}_1$ takovou, že $x \notin E$.

Dále víme, že existuje $y \in E$, který poráží c v alespoň λ hlasech – to proto, že jej porazív $\lambda - 1$ hlasech skupiny (3) a ve hlasu E (zdůrazněme, že E byla neprázdná). Proto potřebujeme vzít dalších $\lambda - 1$ hlasů z (1) takových, že y není v jejich množině E. Tedy ze skupiny (1) bereme právě λ hlasů, při větším počtu by totiž zvítězil kandidát a. Ze skupin (4), (5) a (6) nevezmeme žádný hlas, jinak by c nutně prohrálo s kandidátem a.

Pokud by zadaný systém nebyl disjunktní, pak by existovalo nějaké z takové, že $z \in E_1 \wedge z \in E_2$, které by c porazilo v $\lambda + 1$ hlasech, což je ale spor s tím, že c je Condorcetův vítěz. ■

Ze symetrie voleb víme, že Lemma 4.3 platí i pro kandidáty b, d a zároveň, v kombinaci s Lemmatem 4.2, platí

$$2\lambda = 2\kappa(\mathscr{S}_1) \quad \text{a} \quad 2\bar{\lambda} = 2\kappa(\mathscr{S}_2),$$

tudíž

$$\text{score}_{\texttt{Young}}(c) \geq \text{score}_{\texttt{Young}}(d) \iff \kappa(\mathscr{S}_1) \geq \kappa(S_2).$$

Tedy jsme ukázali polynomiální redukci libovolné instance MSPC na ekvivalentní instance YOUNG-RANKING, tedy YOUNG-RANKING je $\mathsf{P}_{||}^{\mathsf{NP}}$-úplný. ■

Poznamenejme, že v celém důkazu jsme pracovali s Yougovým skóre definovaným tak, že se daný kandidát má stát slabým Condorcetovým vítězem. Pokud bychom se rozhodli pro definici se silným Condorcetovým vítězem (kdy daný kandidát musí ostře porážet všechny ostatní v „menších“ volbách), pak bude důkaz úplnosti pro třídu $\mathsf{P}_{||}^{\mathsf{NP}}$ obdobný.

Postačí pouze upravit důkaz tak, že přidáme ještě jednoho voliče ve skupině (2) a jednoho ve skupině (5).

Naším cílem ale od začátku bylo nikoliv dokázat složitost problému `Young`-RANKING, ale složitost nalezení vítěze v `Young`. Tedy se nyní vraťme k problému `Young`-WINNER.

Není těžké nahlédnout, že Youngova vítěze nalezneme snadno vyzkoušením všech dvojic kandidátů v `Young`-RANKING, což dokazuje i $\mathsf{P}_{||}^{\mathsf{NP}}$-úplnost problému `Young`-WINNER.

Velice podobný důkaz lze použít pro těžkost vítěze pro `Dodgson`. Abychom byli přesnější, tak jeho schéma je stejné, liší se pouze konstrukce hlasů.

Předchozí tvrzení necháváme čtenáři za méně či více náročná domácí cvičení.

5. Strukturální omezení profilů preferencí

■ **Příklad 5.1** Spolubydlícím se po dlouhé době podařilo ušetřit jeden večer na společný večer s deskovými hrami. K dispozici mají tři různé hry – Bang!, Monopoly a Carcassonne. Nyní se musí rozhodnout, se kterou hrou stráví večer. Profil preferencí jednotlivých hráčů má následující podobu:

$$
\begin{aligned}
\text{Honza}: &\ \text{Bang!} \succ \text{Monopoly} \succ \text{Carcassone} \\
\text{Lucie}: &\ \text{Carcassone} \succ \text{Bang!} \succ \text{Monopoly} \\
\text{Veronika}: &\ \text{Monopoly} \succ \text{Carcassone} \succ \text{Bang!}
\end{aligned}
$$

Jelikož se Honza v nedávné době trochu seznámil s teorií voleb, ihned mu bylo jasné, že takový profil preferencí obsahuje Condorcetův cyklus, tedy neexistuje žádné rozumné východisko z celé situace.

V takové nešťastné situaci kamarádům nezbývalo nic jiného, než si jít každý sám číst knihu. Jelikož je venku počasí, že by psa nevyhnal, shodli se bez dlouhé debaty na zapnutí topení. Nyní se ovšem musí dohodnout na teplotě, kterou na topení nastaví, přičemž preference jsou následující

$$H = 17\,^\circ C,\ L = 19\,^\circ C,\ V = 21\,^\circ C.$$

Pro takto nastavené preference je ihned vidět, že topení bude nakonec nastaveno na 19 $^\circ C$. Honza bude tuto teplotu jistě preferovat před jednadvaceti stupni, Veronika naopak. Pro Lucii je to top volba, ta bude tedy vůbec nejspokojenější. ■

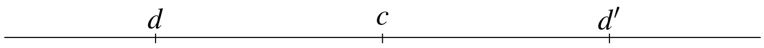
Předchozí příklad sloužil jako ilustrace toho, že pokud mají profily preferencí konkrétní podobu, tedy v našem případě je preference dána vzdáleností od nějakého zvoleného bodu na ose, nemusí být všechno tak, jak jsme zvyklí z klasických voleb. Pojďme se nyní na jedno z takových strukturálních omezení kouknout zblízka.

Definice 5.1 Mějme množinu kandidátů C, množinu voličů V a profil preferencí $\mathscr{P}$. $\mathscr{P}$ nazveme *single-peaked* profilem, jestliže existuje lineární uspořádání $\lhd$ na C takové, že pro každého voliče $v \in V$ je každý prefix hlasu v intervalem pro $\lhd$.

Věta 5.1 V *single-peaked* profilu $\mathscr{P}$ vždy existuje slabý Condorcetův vítěz.

Důkaz. Buď $\lhd$ lineární uspořádání na množině kandidátů odpovídající definici 5.1 a $T = (\forall v \in V : \mathrm{top}(v))$ kolekce[1] top voleb všech voličů.

Nyní prvky T seřaďme dle $\lhd$ a vezmeme medián. Potom je tento kandidát, označme ho c, jistě slabý Condorcetův vítěz. Uvažme následující osu kandidátů nacházejících se v T seřazených dle $\lhd$, kde d a d' jsou dva libovolní kandidáti různí od c.



U osy snadno nahlédneme, že existuje alespoň $|V|/2$ voličů, kteří preferují c před d'. A obráceně, také existuje alespoň $|V|/2$ voličů, kteří preferují c před d. Tedy c je Condorcetův vítěz. ■

Pokud bychom měli navíc zaručeno, že počet voličů je lichý, tak v *single-peak* profilech bude vždy zvolen dokonce silný Condorcetův vítěz.

Představené *single-peak* profily jsou dokonce, jak ukazuje následující věta, ještě zajímavější.

Věta 5.2 Silný Condorcetův vítěz není na *single-peaked* profilech manipulovatelný.

Důkaz.

Lemma 5.3 Mějme omezení profilu preferencí $\mathscr{P}$ garantující existenci Condorcetova vítěze. Potom je Condorcetův vítěz odolný na strategii, a to dokonce i pro skupinu voličů.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existuje profil $\mathscr{P}$, pro který existuje podmnožina voličů $T \subseteq V$ a profil $\hat{\mathscr{P}}$ lišící se od $\mathscr{P}$ pouze na skupině T takový, že nastane v $\hat{\mathscr{P}}$ nastane manipulace ve prospěch T.

Dále označme a Condorcetova vítěze pro původní profil $\mathscr{P}$ a b vítěze pro změněný profil $\hat{\mathscr{P}}$. Jelikož nastala manipulace, tak $b \succ_v^{\mathscr{P}} a$ pro každé $v \in T$. Voliči z T ale nemohli porazit a, jelikož nemohou b ve svých profilech posunout nahoru.

Tedy jsme došli ke sporu, b v profilu $\hat{\mathscr{P}}$ nemůže vyhrát, jelikož ho vždy porazí kandidát a. ■

Dokázané lemma ukazuje dokonce silnější tvrzení o profilech garantujících existenci Condorcetova vítěze, věta z něj tedy přímo plyne. ■

Krom toho, že *single-peak* profily nejsou manipulovatelné, je pro ně dokonce výpočetně snadné najít vítěze i ve volebních systémech, které jsou pověstné svou složitostí.

Tvrzení 2. *Problém nalezení vítěze je pro* `Dodgson` *a* `Young` *na* single-peak *profilech rozhodnutelný v polynomiálním čase.*

Pokud existuje Condorcetův vítěz, pak ho oba uvedené systémy zvolí, již v minulých přednáškách jsem si řekli, že jsou kompatibilní s Condorceho vítězem. Například `Kemeny` ale Condorcet-kompatibilní není, tedy pro něj tvrzení platit nebude.

Zdá se tedy, že pokud bychom dokázali snadno zajistit, že profily voličů budou vždy *single-peaked*, bylo by možné mít volby nejen nemanipulovatelné, ale dokonce bychom měli být schopni najít vítěze poměrně snadno.

[1] Jedná se kolekci, tedy se v T může obecně každý kandidát nacházet vícekrát.

Přirozená otázka, která jistě čtenáře napadla, tedy je, zda lze *single-peek* profily rozpoznávat v polynomiálním čase, na což se pokusíme odpovědět v dalších částech přednášky. Nejdříve si definujme následující pomocný problém.

Definice 5.2 Vstupem problému CONSECUTIVE ONES je matice $\mathbf{A} \in \{0,1\}^{M \times N}$. Úkolem je rozhodnout, zda existuje permutace sloupců $\mathbf{A}$ tak, že každý řádek má tvar $0^i 1^j 0^k$, kde $i + j + k = N$ a $i, j, k \geq 0$.

Nyní libovolné volby s profilem preferencí $\mathscr{P}$ zakódujeme do instance CONSECUTIVE ONES. Rozměry matice nastavíme na $M = n \cdot m$ a $N = m$. Pro každého voliče vytvoříme vektor velikost $|C|$, ve kterém každému kandidátovi $c \in C$ přiřadíme jeho $\mathrm{rank}(c)$ na hodnotu z intervalu $[0, |C| - 1]$ tak, aby platilo, že pokud $c \succ d$, pak $\mathrm{rank}(c) > \mathrm{rank}(d)$.

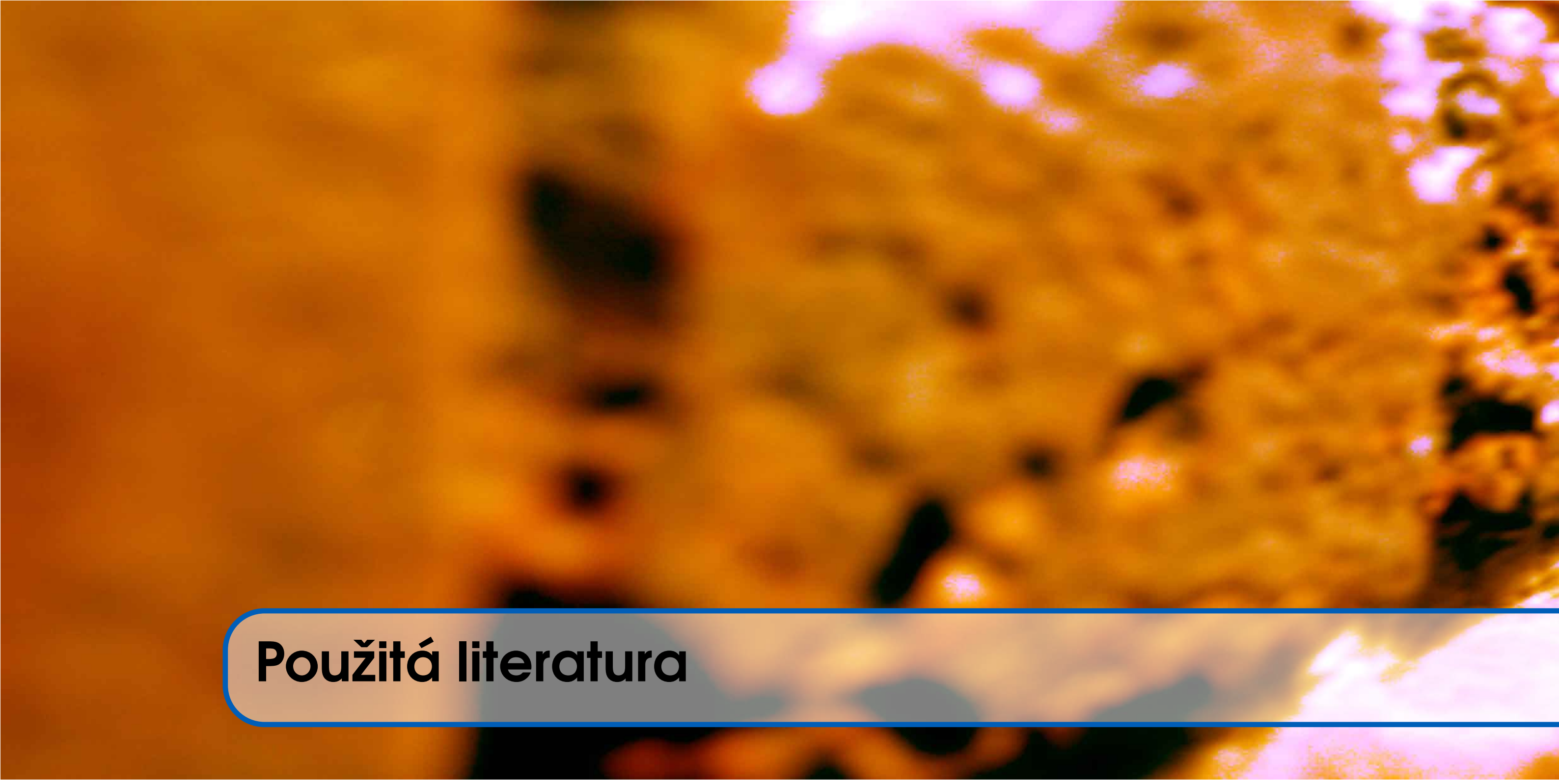
Preference jednoho voliče tak zakódujeme do matice $|C| \times |C|$, kde každý sloupec j bude obsahovat $|C| - \mathrm{rank}(c_j)$ nul následovaných $\mathrm{rank}(c_j)$ jedničkami. Matici $\mathbf{A}$ nyní vytvoříme z individuálních matic jednotlivých voličů.

Pokud pro takovou matici existuje řešení problému CONSECUTIVE ONES, pak je daný profil $\mathscr{P}$ *single-peek*. Stačí tedy zodpovědět otázku, jak těžké je rozhodnout problém CONSECUTIVE ONES.

Fakt 1 (Booth a Lueker 1976)**.** *Problém* CONSECUTIVE ONES *lze vyřešit v polynomiálním čase.*

Tedy i ověření, zda je nějaký profil *single-peek*, lze provést v polynomiálním čase, jelikož vytvoření vstupní instance pro problém CONSECUTIVE ONES jistě zvládneme v polynomiální čase.

Krom představených *single-peek* profilů existují i další velice zajimavá omezení profilů preferencí. Za všechny uveďme například tzv. *single-crossed* profily, které jsou do jisté míry zobecněním *single-peek* profilů.



Použitá literatura

Bartholdi III, John J., Craig A. Tovey a Michael A. Trick (1989). „Voting schemes for which it can be difficult to tell who won the election". In: *Soc. Choice Welf.* 6.2, strany 157–165 (citováno na straně 21).

Baumeister, Dorothea a Jörg Rothe (2016). „Preference Aggregation by Voting". In: *Economics and Computation: An Introduction to Algorithmic Game Theory, Computational Social Choice, and Fair Division*. Editováno Jörg Rothe. Berlin, Heidelberg: Springer, strany 197–317. ISBN: 978-3-662-47904-9. DOI: 10.1007/978-3-662-47904-9_3.

Booth, Kellogg S. a George S. Lueker (1976). „Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using PQ-tree algorithms". In: *Journal of Computer and System Sciences* 13.3, strany 335–379. ISSN: 0022-0000. DOI: https://doi.org/10.1016/S0022-0000(76)80045-1. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022000076800451 (citováno na straně 27).

Brandt, Felix et al., editoři (2016). *Handbook of Computational Social Choice*. Cambridge: Cambridge University Press. ISBN: 978-1-107-44698-4. DOI: 10.1017/CBO9781107446984.

Geanakoplos, John D. (čvn. 2001). *Three Brief Proofs of Arrow's Impossibility Theorem*. Discussion Paper No. 1123RRR. Yale Cowles Foundation. URL: https://ssrn.com/abstract=275510 (citováno na straně 15).

Grossi, Davide (2021). *Lecture Notes on Voting Theory*. arXiv: 2105.00216 [cs.MA].

Kemeny, John G. (1959). „Mathematics without Numbers". In: *Daedalus* 88.4, strany 577–591. URL: https://www.jstor.org/stable/20026529 (citováno na straně 8).

May, Kenneth O. (říj. 1952). „A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision". In: *Econometrica* 20.4, strany 680–684. DOI: 10.2307/1907651 (citováno na straně 13).