

NI-VOL: Volby a volební systémy

Domácí úkol 1

Zadáno: 28. 2. 2024, Vyřešit do: 4. 3. 2024

1. Ukažte, že pro lichý počet kandidátů je **Plurality** zároveň rezolutní, anonymní, neutrální a monotónní. Jinými slovy, dokažte na přednášce vyznačenou implikaci z důkazu Mayovy věty. (2 body)
2. Dokažte, že pro dva kandidáty je **Plurality** jediné volební pravidlo, které je zároveň anonymní, neutrální a *positively responsive*. (4 body)
3. Rozhodněte, zda je pravidlo **OddRule** anonymní, neutrální, rezolutní, jednomyslné, *non-imposed* a *positively responsive*. (3 body)
4. Dokažte, že jestliže je volební pravidlo monotónní a *non-imposed*, pak je také jednomyslné. (1 bod)
5. Dokažte, že jestliže je volební pravidlo Pareto efektivní, pak je nutně jednomyslné. (1 bod)
6. Dokažte, že jestliže je volební pravidlo jednomyslné, pak je nutně také *non-imposed*. (1 bod)

Definice 1. Nechť $\mathcal{E} = (C, V, \mathcal{P})$ je instance voleb s $|C| = 2$. Volební pravidlo f nazveme *positively responsive*, pokud pro každého kandidáta $c \in C$ platí, že jestliže $c \in f(\mathcal{E})$, pak $f((C, V, \mathcal{P}')) = \{c\}$, kde \mathcal{P}' je profil takový, že

$$|\{v \in V \mid x \succ_v^{\mathcal{P}'} y\}| > |\{v \in V \mid x \succ_v^{\mathcal{P}} y\}|.$$

Intuitivně, vlastnost říká, že pokud je nějaký kandidát x mezi vítězi, pak v každém profilu takovém, že x se posune v uspořádání nějakých voličů dopředu, stane se x jediným vítězem.

Definice 2. Nechť V je množina voličů a C je množina kandidátů velikosti 2. Volební pravidlo f nazveme *non-imposed*, pokud pro každého kandidáta $c \in C$ existuje alespoň jeden profil preferencí \mathcal{P} takový, že $f((V, C, \mathcal{P})) = \{c\}$. Pokud tuto vlastnost pravidlo nemá, nazveme ho *imposed*.

Definice 3. Nechť $\mathcal{E} = (C, V, \mathcal{P})$ je instance voleb taková, že každý volič $v \in V$ má na prvním místě uspořádání \succ_v stejnou alternativu $x \in C$. Volební pravidlo nazveme *jednomyslné*, pokud $f(\mathcal{E}) = \{x\}$.

Definice 4. Nechť $\mathcal{E} = (C = \{x, y\}, V, \mathcal{P})$ je instance voleb. Volební pravidlo **OddRule** je definováno jako

$$\text{OddRule}(\mathcal{E}) = \begin{cases} \{x\} & \text{pokud je } |\{v \in V \mid x \succ_v y\}| \text{ lichá,} \\ \{y\} & \text{jinak.} \end{cases}$$