

## Domácí úkol 5

Zadáno: 8. 4. 2024, Vyřešit do: 22. 4. 2024

1. Dokažte, že Borda je *jediný* skórovací protokol se striktně klesající posloupností, které nikdy nezvolí Condorcet loser. (3 body)  
*Hint: Může být  $\text{score}_{\text{Borda}}$  pro kandidáta, který je Condorcet winner, někdy nejmenší ze všech kandidátů? A co u ostatních skórovacích protokolů?*
2. Ukažte, že pravidlo Young trpí na paradox dvojčat. (2 body)  
*Hint: Lze ukázat, že všechna Condorcet konzistentní pravidla trpí na paradox dvojčat.*
3. Ukažte, že problém STV-WEIGHTED-CONSTRUCTIVE-COALITIONAL-MANIPULATION je NP-úplný již pro 3 kandidáty. (1 bod)
4. Pomocí ne více než 3 vět popište rozdíl mezi Arrow's theorem a Gibbard-Satterthwaite theorem. (2 body)
5. Rozhodněte, zda jsou následující restrikce preferencí *hereditary* či nikoliv: *weak Condorcet winner* (profily, kde existuje weak Condorcet winner) a *single-peaked preference*. (2 body)
6. Ukažte, že každý *single-crossing* profil preferencí  $\mathcal{P}$  obsahuje nanejvýš  $\binom{m}{2} + 1$  různých hlasů. (3 body)
7. Najděte *single-crossing* profil  $\mathcal{P}$  s  $m = 7$  kandidáty, ve kterém se vyskytuje  $\binom{m}{2} + 1$  různých hlasů. (2 body)
8. Ukažte, že existuje profil preferencí  $\mathcal{P}$ , který je *single-peaked*, ale není *single-crossing*. Také ukažte, že existuje  $\mathcal{Q}$ , který je *single-crossing*, ale není *single-peaked*. (2 body)
9. Pro následující instanci voleb s approval preferences najděte pro co nejvíce pravidel pro volbu komisí představených na přednášce vítězné komise. Uvažujte  $k = 4$ . (1 bod za každé pravidlo)

$$\begin{array}{cccc} A(v_1): \{a, b\} & A(v_2): \{a, b\} & A(v_3): \{a, b\} & A(v_4): \{a, c\} \\ A(v_5): \{a, c\} & A(v_6): \{a, c\} & A(v_7): \{a, d\} & A(v_8): \{a, d\} \\ A(v_9): \{b, c, f\} & A(v_{10}): \{e\} & A(v_{11}): \{f\} & A(v_{12}): \{g\} \end{array}$$

---

**Definice 1.** Omezení preferencí  $X$  nazveme hereditary, pokud pro každý profil  $\mathcal{P} \in X$  a každý profil  $\mathcal{P}'$ , který vznikne z  $\mathcal{P}$  odstraněním nějakých voličů a kandidátů, platí  $\mathcal{P}' \in X$ .